9na
CONFERENCIA
CIENTÍFICA INTERNACIONAL
Universidad de Holguín

Resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

(Pedro Castañeda Porras)[1], (Pedro Alejandro Castañeda Quintero)[2], (Carlos Negrón Segura)[3].

[1]UPR, Cuba y pcasta@upr.edu.cu, [2]UPR, Cuba y pedroa.castaneda@upr.edu.cu , [3]UHO, Cuba y cnegron@isp.holguin.inf.cu.

RESUMEN

En este trabajo abordaremos una experiencia en la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales (SED) utilizando el método matricial. Este tema tiene una gran importancia por el carácter integrador de la matemática. Proponemos una metodología para la resolución de problemas de corrientes en las redes circuitales con amplia aplicación en la carrera de Telecomunicaciones. Sin dudas compartimos el criterio de (Judson, T. 1997) donde plantea que es importante propiciar la transferencia de estos conocimientos a situaciones relacionadas con áreas de interés del estudiante para que pueda utilizarlos en la solución de problemas que se le presenten durante el ejercicio de su profesión. Hay que centrar la atención en enseñar a resolver los problemas que involucren ecuaciones diferenciales. Todo el proceso está basado en el aprendizaje significativo, que es quien sustenta la resolución de problemas. Como dijera (Vázquez-Reyna, M.2009): y según Ausubel "El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente". Bajo este concepto lo que pretendemos es retomar lo que ya el estudiante sabe del Algebra Lineal y aplicarlo a la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales, lo que permitirá resaltar la utilidad de estos conocimientos. El propósito de este trabajo es propiciar una metodología para resolver problemas de circuitos eléctricos a través de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales de primer orden utilizando los conceptos de valores propios y vectores propios del Algebra Lineal con el apoyo de un Asistente Matemático.

Palabras clave: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales; Método Matricial; Circuito

ABSTRACT

In this work we will approach an experience in the solution of Systems of Differential Linear Equations (SED) using the matrix method. This topic is very important because of the integrating nature of mathematics. We propose a methodology for solving current problems in circuit networks with wide application in the Telecommunications career. Undoubtedly we share the criterion of (Judson, T. 1997) where it states that it is important to promote the transfer of this knowledge to situations related to areas of interest of the student so that he can use them in the solution of problems that arise during the exercise of your profession. We must focus on teaching to solve problems involving differential equations. The whole process is based on meaningful learning, which is what sustains the resolution of problems. As I said (Vázquez-Reyna, M.2009): and according to Ausubel "The most important factor that influences learning is what the student already knows, find out this and teach yourself accordingly". Under this concept what we intend is to take up what the student already knows about Linear Algebra and apply it to the solution of Differential Equations Systems, which will allow to highlight the usefulness of this knowledge. The purpose of this work is to promote a methodology to solve electrical circuit problems through Systems of Linear Differential Equations, using the concepts of eigenvalues and eigenvectors of Linear Algebra with the support of a Mathematical Assistant.

Keywords: Systems of Differential Equations; Matrix Method; Circuit.

1. **INTRODUCCIÓN**.

El perfeccionamiento de los planes de estudios en las diferentes carreras exige aún más la relación entre las asignaturas de una disciplina, las disciplinas del año y de la carrera, para poder enfrentar y resolver los problemas de carácter profesional.
Hasta este momento los estudiantes han tratado las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de forma individual, pero en la práctica se necesita más de una Ecuación Diferencial para formular matemáticamente situaciones físicas a las cuales ellos se enfrentan.

2. **METODOLOGÍA.**

A continuación, exponemos una metodología y algunas ideas básicas de cómo resolver estos SED.

IDEAS BÁSICAS.

Si X, A(t) y F(t) denotan respectivamente las matrices

$$X=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\ldots a_{2n}(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \quad a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_2(t) \\ . \qquad & \qquad . \\ . \qquad & \qquad . \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n1}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Puede ser escrito como,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\ldots a_{2n}(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \quad a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$,

o simplemente $\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$. (3), si el sistema es homogéneo, (3) se convierte en

$\frac{dX}{dt} = A(t)X$.(4)

***Definición**:* Un vector solución en un intervalo I, es cualquier matriz columna con elementos diferenciables

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$, tal que satisfaga el sistema (3) en ese intervalo.

Teorema.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (4) en un intervalo *I* y sea X_p cualquier vector solución del sistema no homogéneo (3) en el mismo intervalo. Entonces $X = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_kX_k + X_p$ también es una solución del sistema no homogéneo en el intervalo, cualquiera que sean las constante $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

A continuación, se dará una metodología o secuencia para aplicar el método de coeficientes indeterminados a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Solución del sistema homogéneo. (X_c)

- Conformar la Matriz asociada del sistema homogéneo.
- Plantear la Ecuación matricial.
- Obtener la Ecuación característica.
- Hallar lo valores y vectores propios.
- Plantear la solución general del sistema homogéneo.

Encontrar un vector solución X_p del sistema no homogéneo.

- Proponer una solución particular de la parte no homogénea.
- Ajustar correctamente tal propuesta.
- Utilizar el método de los coeficientes indeterminados.
- Y plantear $\boldsymbol{X = X_c + X_p}$.

3 . RESULTADOS Y DISCUSIÓN

PROBLEMA:

Determine las características volt-ampéricas de los elementos del siguiente circuito. Dados los valores $R_1 = 6\,ohm,\ R_2 = 5\,ohm, L_1 = 1H,\ L_2 = 1H, V = 50\sin t\ V$

Con las condiciones iniciales: $i_2(0) = 0,\ i_3(0) = 0$.

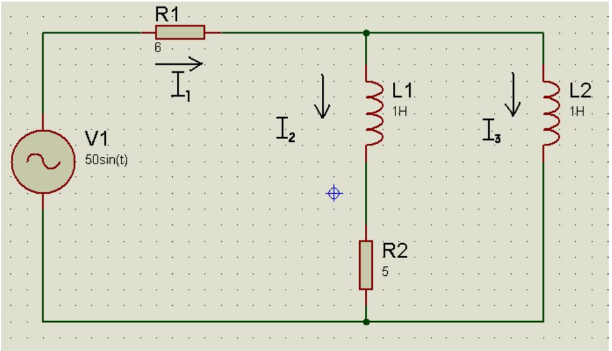

Figura 1. Problema de redes.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

$$\frac{di_2}{dt} = -11i_2 - 6i_3 + 50\sin t$$

$$\frac{di_3}{dt} = -6i_2 - 6i_3 + 50\sin t$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Resultados según Asistente Matemático

ECUACIÓN EN FORMA MATRIACIAL

$$\frac{d}{di}\begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 \cdot SIN(t) \\ 50 \cdot SIN(t) \end{bmatrix}$$

MATRIZ ASOCIADA AL SISTEM.

$$M := \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

ECUACIÓN MATRICIAL.

$$\begin{bmatrix} -11 - \lambda & -6 \\ -6 & -6 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ECUACIÓN CARACTERÍSTICA Y VALORES PROPIOS.

$$DET \begin{bmatrix} -11 - \lambda & -6 \\ -6 & -6 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 17 \cdot \lambda + 30 = 0$$

$$\mathrm{SOLVE}(\lambda^2 + 17\cdot\lambda + 30 = 0,\ \lambda,\ \mathrm{Real})$$

$$\lambda = -15 \vee \lambda = -2$$

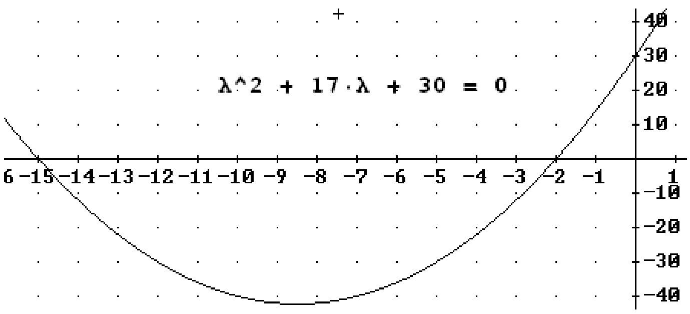

Figura 2. Grafica del polinomio característico.

Es interesante ver en esta experiencia docente cómo los estudiantes tienen que retomar contenidos ya estudiados en el curso anterior para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Según (Maldonado, M. A., 2009) de acuerdo al aprendizaje significativo, los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. Esto se logra cuando el estudiante relaciona los nuevos conocimientos con los anteriormente adquiridos; pero también es necesario que el alumno se interese por aprender lo que se le está mostrando.

VECTORES PROPIOS CORRESPONDIENTE A LOS VALORES PROPIOS

$\lambda = -15 \ y \ \lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 4\cdot t - 6\cdot v = 0 \\ 9\cdot v - 6\cdot t = 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{SOLVE}([4\cdot t - 6\cdot v = 0,\ 9\cdot v - 6\cdot t = 0],\ [t,\ v])$$

$$[2\cdot t - 3\cdot v = 0]$$

$$\mathrm{SOLVE}([2\cdot t - 3\cdot v = 0],\ v,\ \mathrm{Real})$$

$$\left[v = \frac{2\cdot t}{3}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -9\cdot t - 6\cdot v = 0 \\ -6\cdot t - 4\cdot v = 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{SOLVE}([-9\cdot t - 6\cdot v = 0,\ -6\cdot t - 4\cdot v = 0],\ [t,\ v])$$

$$\mathrm{SOLVE}(\mathrm{SOLVE}([-9\cdot t - 6\cdot v = 0,\ -6\cdot t - 4\cdot v = 0],\ [t,\ v]),\ v,\ \mathrm{Real})$$

$$\left[v = -\frac{3\cdot t}{2}\right]$$

Como la matriz de los coeficientes M es de 2x2 y dado que se han obtenido dos soluciones linealmente independientes, concluimos que la solución general del sistema homogéneo es:

$$i_h = e \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \hat{e}^{-2 \cdot t} + f \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \hat{e}^{-15 \cdot t}$$

Se puede observar que todo este trabajo matricial, en la secuencia metodológica desarrollada para resolver el problema, se realizó con la ayuda del Asistente Matemático DERIVE, esta es otra forma de articular con el uso de las nuevas tecnologías. Veremos también algunos ficheros para calcular los valores propios y vectores propios correspondientes, donde se darán cuenta que es más práctico y rápido.

$$M := \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

EIGENVALUES(M, λ)

[-2, -15]

EXACT_EIGENVECTOR(M, -2)

$$\left[\left[@1,\ -\frac{3 \cdot @1}{2}\right]\right]$$

EXACT_EIGENVECTOR(M, -15)

$$\left[\left[@2,\ \frac{2 \cdot @2}{3}\right]\right]$$

Como F(t) se puede expresar de la siguiente manera:

$F(t) = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} \sin t$, intentaremos encontrar una solución particular que tenga la forma:

$$i_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \mathrm{COS}(t) + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \cdot \mathrm{SIN}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \mathrm{COS}(t) + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \cdot \mathrm{SIN}(t)\right) = \begin{bmatrix} -11 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \mathrm{COS}(t) + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \cdot \mathrm{SIN}(t)\right) + \begin{bmatrix} 50 \cdot \mathrm{SIN}(t) \\ 50 \cdot \mathrm{SIN}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \cdot \mathrm{COS}(t) - a \cdot \mathrm{SIN}(t) = -(11 \cdot a + 6 \cdot b) \cdot \mathrm{COS}(t) - (11 \cdot c + 2 \cdot (3 \cdot d - 25)) \cdot \mathrm{SIN}(t) \\ d \cdot \mathrm{COS}(t) - b \cdot \mathrm{SIN}(t) = -6 \cdot (a + b) \cdot \mathrm{COS}(t) - 2 \cdot (3 \cdot c + 3 \cdot d - 25) \cdot \mathrm{SIN}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} c\cdot COS(t) - a\cdot SIN(t) = -(11\cdot a + 6\cdot b)\cdot COS(t) - (11\cdot c + 2\cdot(3\cdot d - 25))\cdot SIN(t) \\ d\cdot COS(t) - b\cdot SIN(t) = -6\cdot(a + b)\cdot COS(t) - 2\cdot(3\cdot c + 3\cdot d - 25)\cdot SIN(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$SOLVE([c = -(11\cdot a + 6\cdot b), -a = -(11\cdot c + 2\cdot(3\cdot d - 25)), d = -6\cdot(a + b), -b = -2\cdot(3\cdot c + 3\cdot d - 25)], [a, b, c, d])$$

$$\left[a = \frac{145}{113} \wedge b = -\frac{280}{113} \wedge c = \frac{85}{113} \wedge d = \frac{810}{113}\right]$$

$$i_p = \left[\begin{array}{c} \frac{145}{113} \\ -\frac{280}{113} \end{array}\right]\cdot COS(t) + \left[\begin{array}{c} \frac{85}{113} \\ \frac{810}{113} \end{array}\right]\cdot SIN(t)$$

$$\left[\begin{array}{c} i_2 \\ i_3 \end{array}\right] = e\cdot\left[\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{array}\right]\cdot \hat{e}^{-2\cdot t} + f\cdot\left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{2}{3} \end{array}\right]\cdot \hat{e}^{-15\cdot t} + \left[\begin{array}{c} \frac{145}{113} \\ -\frac{280}{113} \end{array}\right]\cdot COS(t) + \left[\begin{array}{c} \frac{85}{113} \\ \frac{810}{113} \end{array}\right]\cdot SIN(t)$$

$$\left[\begin{array}{c} i_2 = e\cdot \hat{e}^{-2\cdot t} + f\cdot \hat{e}^{-15\cdot t} + \frac{145\cdot COS(t)}{113} + \frac{85\cdot SIN(t)}{113} \\ i_3 = -\frac{3\cdot e\cdot \hat{e}^{-2\cdot t}}{2} + \frac{2\cdot f\cdot \hat{e}^{-15\cdot t}}{3} - \frac{280\cdot COS(t)}{113} + \frac{810\cdot SIN(t)}{113} \end{array}\right]$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema de redes se obtienen las soluciones particulares siguientes:

$$i_2 = -\frac{20\cdot \hat{e}^{-2\cdot t}}{13} + \frac{375\cdot \hat{e}^{-15\cdot t}}{1469} + \frac{145\cdot COS(t)}{113} + \frac{85\cdot SIN(t)}{113}$$

$$i_3 = \frac{30\cdot \hat{e}^{-2\cdot t}}{13} + \frac{250\cdot \hat{e}^{-15\cdot t}}{1469} - \frac{280\cdot COS(t)}{113} + \frac{810\cdot SIN(t)}{113}$$

$$i_1 = \frac{10\cdot \hat{e}^{-2\cdot t}}{13} + \frac{625\cdot \hat{e}^{-15\cdot t}}{1469} - \frac{135\cdot COS(t)}{113} + \frac{895\cdot SIN(t)}{113}$$

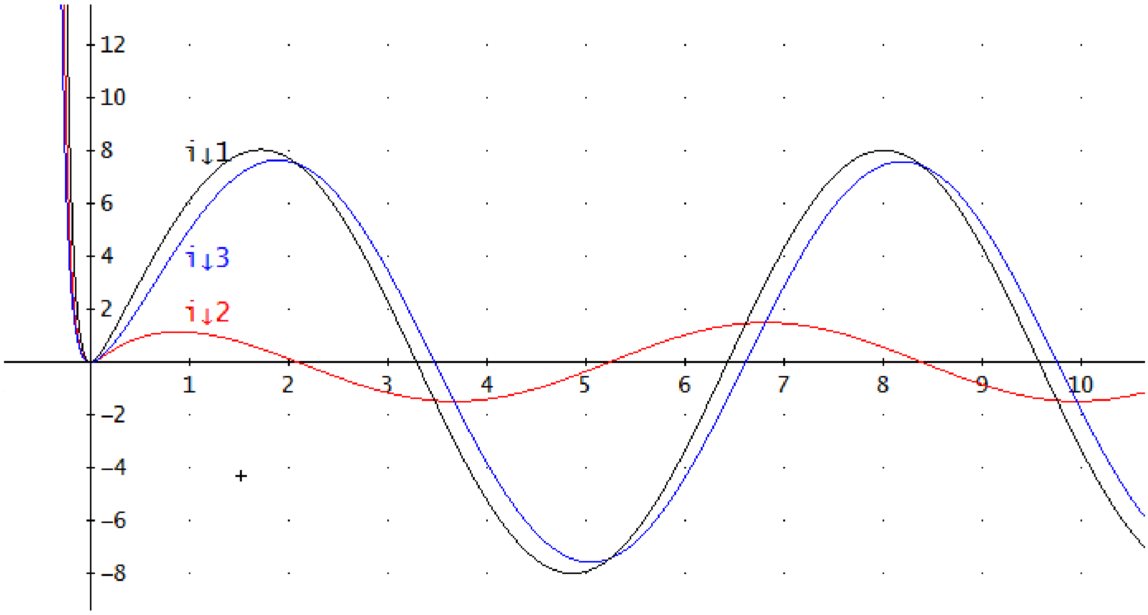

Figura 3. Graficas de las corrientes o solución particular del problema.

El método de los coeficientes indeterminados no es tan simple, éste puede aplicarse solamente cuando los elementos de F(t) son constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos, o bien sumas infinitas y productos de estas funciones.
Se pude notar también que no se han visto los casos donde los valores propios se repiten o son complejos. En esta experiencia solo se quiere tratar la articulación entre las asignaturas como un modo donde los estudiantes vean la necesidad de retomar contenidos anteriores para poder entender nuevos conocimientos. Esta articulación sustenta la resolución de problemas, que se apoya en las ventajas y requisitos del aprendizaje significativo.

Según (Maldonado . M. A., 2009) algunas de las ventajas del Aprendizaje Significativo son:

- Produce una retención más duradera de la información.
- Facilita el adquirir nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido.
- La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.

Requisitos para lograr el Aprendizaje Significativo:

- Significatividad lógica del material: el material que presenta el maestro al estudiante debe estar organizado, para que se de una construcción de conocimientos.
- Significatividad psicológica del material: que el alumno conecte el nuevo conocimiento con los previos y que los comprenda.
- Actitud favorable del alumno: ya que el aprendizaje no puede darse si el alumno no quiere. Este es un componente de disposiciones emocionales y actitudinales, en donde el maestro sólo puede influir a través de la motivación.

9na
CONFERENCIA
CIENTÍFICA INTERNACIONAL
Universidad de Holguín

CONCLUSIONES:

En la experiencia que se acaba de exponer se ha explicado cómo utilizar los conceptos del Álgebra Lineal en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. En la misma los estudiantes se sintieron motivados desde el momento que tuvieron que retomar los contenidos de valores propios y vectores propios, lo sintieron como algo que no dieron en vano en el curso anterior y por ende reafirmaron y guardaron a largo plazo lo estudiado en su memoria. El Aprendizaje Significativo conduce al alumno a este resultado y lo ayuda a que vaya construyendo sus propios esquemas de conocimiento para una mejor comprensión de los conceptos.
También el uso del asistente matemático les facilitó el trabajo algebraico, que en ocasiones es engorroso, permitiendo defender la idea sobre el rol que deben cumplir las TICs en los procesos formativos: Todo conocimiento que se adquiere de manera intencionada, mediante un proceso diseñado para ello, implica **una mediación** en el tratamiento de la información, las estrategias y los medios que promueven el aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Judson, T. (1997). *University Mathematics Education in the United States.* Recuperado el 7 de julio de 2003 de: http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/etrang/judson/node14.html
Maldonado, M. A. (2018, 29 de agosto). El aprendizaje significatigo de David Paul Ausebel.www. Monografías. com/trabajos10/dapa.dapa.shtmal#teo.Vázquez-Reyna,M. (2009, 16 de junio). www.consumer.es/web/es/educacion/extraescolar/2009/06/16/185986.php.

SOBRE LOS AUTORES

Pedro Castañeda Porras, Universidad de Pinar del Río, Cuba, profesor de cálculo en las carreras de Ciencias Técnicas, DrC .y prof. Titular, pcasta@upr.edu.cu, Sociedad de Matemática y Computación, árbitro del ALME.
Pedro Alejandro Castañeda Quintero, Universidad de Pinar del Río, Cuba, prof. de cálculo en las carreras de Ciencias Técnicas, Ingeniero en Telecomunicaciones y Electrónica, prof. Instructor, pedroa.castaneda@upr.edu.cu,
Carlos Negrón Segura, Universidad de Holguín, Cuba, prof. de Matemática en la carrera pedagógicas, MsC. Y prof. Auxiliar.