9na CONFERENCIA CIENTÍFICA INTERNACIONAL
Universidad de Holguín

Manual de estudio de álgebra lineal para enseñanza semipresencial

Manual of study of linear algebra for blended learning environment

Pedro López León[1], Olga Lidia Pérez González[1], Isabel Yordi González[1].

[1]Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte Loynaz", Cuba, pedro.leon@reduc.edu.cu, olga.perez@reduc.edu.cu, isabel.yordi@reduc.edu.cu.

RESUMEN

Los estudios sobre el Álgebra Lineal han proliferado en los últimos años y denotan insuficiencias en el aprendizaje de sus conceptos y en la resolución de ejercicios en las carreras de ingeniería, lo que limita el desempeño de los estudiantes en la solución de tareas algebraicas. Este trabajo tiene como objetivo presentar un manual de estudio de álgebra lineal elaborado por profesores de la Universidad de Camagüey. Este manual constituye una guía de estudio para los estudiantes de los cursos por encuentros de ciencias técnicas en la asignatura de Álgebra Lineal, siendo imprescindible para su utilización el libro de texto "Álgebra Lineal" de María Virginia Varela Marcelo, Leandro Suárez Gandolff, Miriam Castro García y Gulnara Baldoquín de la Peña. En general, este manual resume conceptos preliminares y fundamentales, teoremas y corolarios, ejemplos propuestos y resueltos y además en cada uno de sus capítulos se encuentran tres grupos de ejercicios, donde en el primer grupo siempre se retoma lo estudiado en ese capítulo, en el segundo se ven ejercicios resueltos y ya en el tercero es una guía de ejercicios para resolver por los estudiantes, donde la complejidad de estos va en aumento paulatinamente.

Palabras claves: algebra lineal; tareas algebraicas; conceptos; estudios independientes.

ABSTRACT

Studies on Linear Algebra have proliferated in recent years and denote shortcomings in the learning of their concepts and the resolution of exercises in engineering careers, which limits the performance of students in solving algebraic tasks. The aim of this work is to present a study manual of linear algebra designed by professors of the University of Camagüey. This manual is a study guide for the students of blended learning programs of technical sciences in the subject of Linear Algebra, being essential for its use the textbook "Linear Algebra" by Maria Virginia Varela Marcelo, Leandro Suárez Gandolff, Miriam Castro Garcia and Gulnara Baldoquín de la Peña. In general, this manual summarizes preliminary and fundamental concepts, theorems and corollaries, proposed and solved examples and also in each of its chapters there are three groups of exercises, where in the first group the aspects studied in that chapter are always repeated, second are solved exercises and already in the third is a guide of exercises to be solved by the students, where the complexity of these is gradually increasing.

Keywords: linear algebra; algebraic tasks; concepts; independent studies.

1. INTRODUCCIÓN

A través de la utilización de diferentes técnicas y métodos de la investigación se han detectado insuficiencias en los procesos de formación de los estudiantes de las carreras universitarias especialmente en las de ingeniería, se ha constatado que en ocasiones presentan dificultades para interpretar, operar con los objetos, aplicar y comunicar los conocimientos matemáticos a diversas situaciones profesionales y de la vida. En muchas ocasiones obedece a que se privilegia lo instructivo muy por encima de lo educativo y lo desarrollador y no se aprovechan adecuadamente las potencialidades que la actividad propicia para generar un aprendizaje activo y reflexivo en el que el alumno se vea compulsado a desplegar sus mejores

posibilidades cognitivas en función del logro de un fin determinado. Además, los cambios tecnológicos, culturales y sociales que han ocurrido en las últimas décadas demandan una nueva manera de proceder en las aulas. Este nuevo escenario ha producido modificaciones en los planes de estudio de las universidades, encaminadas a garantizar la formación de un profesional más competitivo, con una amplia movilidad ocupacional, con altas posibilidades de insertarse en el mundo laboral, de la ciencia y de la tecnología; lo cual significaría garantizar un graduado con una elevada y sólida formación, capaz de superarse constantemente, comunicarse, generar ideas y resolver los problemas científicos y sociales de su profesión.

2. METODOLOGÍA

Este manual de estudio va dirigido principalmente a los estudiantes que se encuentran en la modalidad de cursos por encuentros, y dentro de esta a los que se encuentran estudiando carreras de ciencias técnicas; en la asignatura de Algebra Lineal es imprescindible el uso del libro de texto “Algebra Lineal” de María Virginia Varela Marcelo, Leandro Suárez Gandolff, Miriam Castro García y Gulnara Baldoquín de la Peña. En este tipo de trabajo, el marco metodológico es relativamente sencillo porque no se utilizan encuestas, entrevistas, datos obtenidos en el campo, por basarse en modelos teóricos no estadísticos. Por tanto, no existen formatos para encuestas, ni entrevistas, ni tiempos. Las fases estuvieron determinadas sólo por la disponibilidad de la información.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Este manual, siguiendo la estructura y orden del libro de texto antes mencionado, se realizó con la idea e intención de que los alumnos estuvieran más cerca del contenido a estudiar, pero a su vez que les fuera más accesible y entendible los contenidos que se van impartiendo a lo largo de la asignatura; además se han agregados ejemplos resueltos y propuestos que no vienen en el libro de texto y que tienen una relación más directas con las carreras técnicas, es decir, ejercicios propios de las especialidades técnicas, dígase, electricidad, mecánica, veterinaria, química, etc.

Este consta de los siguientes capítulos:

Capítulo 1: “Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.”; este tema está divido en 6 epígrafes, en los cuales se abordan los contenidos relacionados con sistemas de ecuaciones lineales (SEL), clasificación y su representación matricial, se abordan además las matrices, así como determinar el determinante de una matriz cuadrada y las transformaciones elementales.

Capítulo 2: “Espacios vectoriales reales.”; cuatro epígrafes forman este tema, donde se abordan los espacios vectoriales reales y subespacios, además los espacios vectoriales espaciales y se culmina el tema con las combinaciones lineales (C.L.).

Ejemplo Resuelto de Combinación Lineal
Datos: escalares y vectores de la C.L.
Incógnita: vector resultante
$x = (1, -1, 2); y = (2, 1, 3); z = (-1, 2, 3)$
Hallar $2x - y + 4z$
Aquí se puede observar que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ *y* $\lambda_3 = 4$ *y que solo tenemos que sustituir a los vectores* x, y *y* z *para obtener el vector resultante:*
$2x - y + 4z$
$= 2(1, -1, 2) - (2, 1, 3) + 4(-1, 2, 3)$
$= (2, -2, 4) - (2, 1, 3) + (-4, 8, 12)$
$= (2 - 2 - 4, -2 - 1 + 8, 4 - 3 + 12)$
$= (-4, 5, 13)$

Luego $2x - y + 4z = (-4, 5, 13)$

Capítulo 3: “Espacios vectoriales de dimensión finita.”; la dependencia lineal, los subespacios generados, las bases y dimensiones, las coordenadas de un vector y la matriz de cambio de base son los aspectos abordados en este tercer capítulo.

Capítulo 4: “Aplicaciones lineales.”; en este último capítulo se habla de las aplicaciones lineales, de las matrices asociadas a estas, su representación matricial, los subespacios asociadas a dicha aplicación y por último los endomorfismos diagonalizable.

Método para probar que una aplicación es lineal
Determinar cuál es el espacio de partida E.
Tomar $a \in E$, $b \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Calcular λ_a *y* $a + b$.
Hallar $f(a)$, $f(b)$, $f(\lambda_a)$ *y* $f(a + b)$.
Calcular $\lambda f(a)$ *y* $f(a) + f(b)$.
Determinar si $\begin{matrix} * f(\lambda_a) = \lambda f(a) \\ * f(a + b) = f(a) + f(b) \end{matrix}$.
Ejemplo:
Para probar que la aplicación $\begin{matrix} f: \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \rightsquigarrow & (-b, a) \end{matrix}$ *es lineal, vemos que el espacio vectorial de partida es* $\mathbb{R}^2$ *y por eso tomamos dos elementos de* $\mathbb{R}^2$, $a = (x_1, x_2)$ *y* $b = (y_1, y_2)$ *y un* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Calculamos
$\lambda_a = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$
$a + b = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
Hallamos
$f(a) = f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$
$f(b) = f(y_1, y_2) = (-y_2, y_1)$
$f(\lambda_a) = f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (-\lambda x_2, \lambda x_1)$
$f(a + b) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (-x_2 - y_2, x_1 + y_1)$
$\lambda f(a) = \lambda(-x_2, x_1) = (-\lambda x_2, \lambda x_1)$
$f(a) + f(b) = (-x_2, x_1) + (-y_2, y_1) = (-x_2 - y_2, x_1 + y_1)$
Y probamos que
$* f(\lambda_a) = \lambda f(a) \Rightarrow (-\lambda x_2, \lambda x_1) = (-\lambda x_2, \lambda x_1)$
$* f(a + b) = f(a) + f(b) \Rightarrow (-x_2 - y_2, x_1 + y_1) = (-x_2 - y_2, x_1 + y_1)$
Luego f *es una aplicación lineal.*
Nota: observe que en forma general todas las operaciones que hemos hecho para determinar se f *lineal se deducen de las condiciones de linealidad.*
$f(\lambda_a) = \lambda f(a)$
$f(a + b) = f(a) + f(b)$
Según el método, primero determinamos quien es a *y* b, *hallamos* λ_a *y* $a + b$ *y después encontramos cada uno de los miembros de* I *y* II, *para por ultimo comprobar si* I *y* II *se cumplen.*

Cada capítulo presenta conceptos preliminares que se ocupan de recordar aquellos contenidos necesarios para comprender el tema abordado en las clases. Conceptos fundamentales que hacen referencia a los conceptos, métodos de trabajo y resúmenes más importantes del tema, ejemplificando en cada caso. También se encuentran orientadas tareas de estudio independiente a los temas más amplios y complejos, a realizar por los estudiantes auxiliándose del libro de texto.

En cada capítulo al final tenemos tres grupos de ejercicios:

Grupo I se dan las respuestas utilizando los métodos, conceptos y resúmenes dados en forma detallada.

Ejemplo resuelto (Capítulo 1)
Represente en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $x - 2y + 3z = 2$
$-x + y - z = 0$

b) $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$
$x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 2$
$x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 3$
$x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 13x_4 = 5$

Respuesta:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & -8 & 7 \\ 1 & 4 & -13 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ejemplo resuelto (Capítulo 3)
Encuentre las coordenadas del vector $X = (1,3,0)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *en la base* $A = \{(1,1,0)(0,1,2)(2,0,4)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.
Para obtener las coordenadas de un vector en una base, basta con expresar el vector como combinación lineal de la base, por tanto:

$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(2,0,4) = (1,3,0)$

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1$
$\alpha_1 + \alpha_2 = 3 \quad \Rightarrow$
$2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 \\ 1 & 1 & 0 & . & 3 \\ 0 & 2 & 4 & . & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 \\ 0 & 1 & -2 & . & 2 \\ 0 & 2 & 4 & . & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \qquad \alpha_3 = -\,{}^{1}\!/_{2}$
$\alpha_2 - 2\alpha_3 = 2 \Rightarrow \quad \alpha_2 = 1$
$8\alpha_3 = -4 \qquad \alpha_1 = 2$

Por tanto: $X_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\,{}^{1}\!/_{2} \end{pmatrix}$

Grupo II los ejercicios pueden resolverse en el trabajo independiente de los estudiantes, utilizando como base orientadora los conceptos, métodos y resúmenes, así como, los ejercicios del Grupo I.

Ejercicio propuesto (Capítulo 2)
Determine si cada uno de los siguientes conjuntos es un SEV *de* E.

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}, E = \mathbb{R}^3$
$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y^2\}, E = \mathbb{R}^3$
$S = \left\{at^2 + bt + \frac{c}{a}, b, c \in \mathbb{R} \wedge a + b = 1\right\}, E = polinomios\ grado\ \leq 2$
$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2z = 0 \wedge y = 0\}, E = \mathbb{R}^3$
$L = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ a,b,c,d \in \mathbb{R}, a + d = 0\right\}, E = matrices\ cuadradas\ de\ orden\ 2$
$Q = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a < 1\}, E = \mathbb{R}^3$
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\}, E = \mathbb{R}^2$
$I = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a - 2b = 1\}, E = \mathbb{R}^2$

Determinar los valores propios, los vectores propios y los subespacios propios de los siguientes endomorfismos: (Capítulo 4)

$f(a,b) = (2a + 2b, a + 3b)$

$f(a,b,c) = (2a + b + 3c, b + 3c, 2c)$

$f(a,b,c) = (a + b, 2a, c - b)$

$f(a,b,c) = (b, c, a - 3b + 3c)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Seleccione, si es posible, una base propia, la matriz diagonal asociada y si son diagonalizable cada uno de los casos del ejercicio anterior. (Capítulo 4)

Grupo III el grado de complejidad de los ejercicios aumenta, ya aquí el estudiante debe dominar perfectamente los métodos, conceptos y resúmenes del tema y debe analizar cuidadosamente el enunciado de cada ejercicio. Es importante que antes de resolver este grupo de ejercicios se estudie cuidadosamente el primer grupo y se resuelva el segundo. Este grupo 3 en cada capítulo cierra con una serie de preguntas a responder por el estudiante donde revisa y consolida lo estudiado en el tema.

Ejercicio propuesto (Capítulo 1)
Calcule el valor de Z utilizando el método de Cramer si

$-2x - 4y + 3z = -2$

$3x + y = 3$

$5x + 4y - 2z = 5$

Ejercicio propuesto (Capítulo 3)
Conteste verdadero o falso. Explique.

a) ______ *El sistema $A = \{a_1\} \subset \mathbb{R}^3$ es siempre $L.I.$.*
b) ______ *El sistema de vectores $A = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}^2$ es siempre $L.D.$.*
c) ______ *Si el número máximo de vectores $L.I.$ de $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{R}^6$ es 3, entonces $B = \{a_1, a_2, a_3, a_5\} \subset A$ es $L.I.$.*
d) *Si $A = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{R}^3$, entonces:*
   i) ______ $dim\, S(A) > 2$
   ii) ______ *A es una base de $\mathbb{R}^2$*
   iii) ______ $dim\, S(A) < 3$
e) *Si $A \subset \mathbb{R}^5$ y el # máximo de vectores $L.I.$ de A es 4, entonces:*
   i) ______ *A es una base de $\mathbb{R}^4$*
   ii) ______ $dim\, S(A) = 4$
   iii) ______ *A es una base de $\mathbb{R}^5$*
f) *Si $B = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}^4$ y B es $L.I.$, entonces:*
   i) ______ $dim\, S(B) = 4$
   ii) ______ $dim\, S(B) > 4$
   iii) ______ $dim\, S(B) < 4$
g) ______ *Si $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $x = a_1 + a_2$ entonces $B = \{a_1, a_2, x\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.*

Además, se orienta estudiar por el texto algunos aspectos fundamentales antes de resolver los ejercicios del Grupo II y/o del Grupo III.

A continuación, relacionamos unos ejemplos de la aplicación que tiene el álgebra en las diferentes carreras que se cursan en las universidades y que forman parte de este manual.

Ejemplo (edades):
Hace 8 años la edad de Alberto era triple que la edad de Bernardo, y dentro de 4 años la edad de Bernardo será los $\frac{5}{9}$ *de la edad de Alberto. Hallar las edades actuales.*

Ejemplo(física):
Un bote que navega por un río recorre 15 kilómetros en $1\frac{1}{2}$ *horas a favor de la corriente y 12 kilómetros en 2 horas contra la corriente. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.*

Ejemplo(química):
Parte del propulsante empleado en una etapa de las misiones Apolo a la Luna fue un óxido de nitrógeno, el tetróxido de nitrógeno (N_2O_4). *Uno de los combustibles utilizados en ese propulsante fue la hidracina* (N_2H_4). *La combustión produjo principalmente nitrógeno y agua. La ecuación química de este proceso resultó* $N_2H_4 + N_2O_4 \rightarrow N_2 + H_2O$
Se pide balancear esta ecuación.

4. CONCLUSIONES

Se han mostrado algunos ejemplos, que en nuestros cursos nos demostraron el potencial de los ejercicios relacionados con las carreras en cuestión, que además sirven como motivadores para el aprendizaje del álgebra lineal. La resolución de estos ejercicios ha sido usada en trabajos prácticos correspondientes a la asignatura a diferentes niveles, abarcando desde los docentes en postgrados hasta los estudiantes de último año en diferentes carreras. Se ha puesto de manifiesto su efecto motivador y cabe señalar que los resultados son totalmente prácticos y que solo buscan aportar al conjunto de ejercicios necesarios para usarse en clases y trabajos prácticos. Este trabajo busca también que en los cursos de Álgebra Lineal se incorporen más aplicaciones como las que se presentan. Los cálculos pueden realizarse haciendo uso de programas tales como Matlab o por medio de calculadoras científicas, las cuales tienen importantes aplicaciones para el estudio de cursos de ingeniería.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Varela Marcelo, María V.; Suárez Gandolff, L.; Castro García, M. y Baldoquín de la Peña, G. (1986). *Álgebra Lineal*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Mola Reyes, Cila Eduviges. (2013). *Estrategia didáctica para la comprensión de los objetos del álgebra lineal en las carreras de ingeniería en la Universidad de Camagüey* (Tesis doctoral), Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”, Camagüey, Cuba.

Martín Sánchez, Ángela Mercedes. (2018). *Estrategia didáctica para el desarrollo de las relaciones conceptuales en el álgebra lineal para las carreras de ingeniería* (Tesis doctoral), Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”, Camagüey, Cuba.

SOBRE LOS AUTORES

Profesor Instructor Ing. Pedro López León, Facultad de Informática y Ciencias Exactas, Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”. pedro.leon@reduc.edu.cu
Profesora Titular Dra. C. Olga Lidia Pérez González, Facultad de Informática y Ciencias Exactas, Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”, Presidenta Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). olga.perez@reduc.edu.cu
Profesora Titular Dra. C. Isabel Yordi González, Facultad de Informática y Ciencias Exactas, Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”, isabel.yordi@reduc.edu.cu