9na
CONFERENCIA
CIENTÍFICA INTERNACIONAL
Universidad de Holguín

Introducción de conceptos matemáticos con GeoGebra: el límite, la derivada y la integral definida

Introduction of mathematical concepts with GeoGebra: the limit, the derivative and the definite integral

Rogelio Paulino Acosta González[1], Luis Enrique Ramos Puga[2], Maikel Hechavarría Aleaga[3].

[1]Universidad de Las Tunas, Cuba, racosta@ult.edu.cu, [2]Universidad de Las Tunas, luiser@ult.edu.cu, [3]Universidad de Las Tunas, maikelea@ult.edu.cu.

RESUMEN

El trabajo con los conceptos de las matemáticas superiores que involucran procesos de aproximaciones sucesivas, como es propiamente el de límite de una función en un punto, así como los de derivada de una función en un punto y el de integral definida, entre otros, enfrenta el reto de mostrar la dinámica intrínseca de los mismos, una realidad que es independiente de los medios que se utilicen en el proceso de enseñanza aprendizaje que se lleve a cabo, aunque cabría esperar mejores posibilidades de conseguir reflejarla utilizando medios como los que es posible elaborar con GeoGebra. En tal sentido, el objetivo de este trabajo es presentar actividades elaboradas con este software para la introducción de los conceptos mencionados, donde las opciones de movimiento y colores dinámicos son claves para reforzar las ideas de aproximación. Son tres las actividades para el límite funcional, una de las cuales interpreta este concepto según Cauchy, cuatro para la derivada, una de ellas con fundamento en la noción de recta tangente y otra con base en el concepto de velocidad instantánea. En el caso de la integral definida, se presentan siete actividades que muestran el papel relevante de los rectángulos en la noción intuitiva de área, así como la necesidad de un proceso de paso al límite para definir y determinar el área de regiones con parte de la frontera curva. Versiones de algunas de estas actividades fueron desarrolladas como parte de las funciones de los autores como tutores en la República de Angola.

Palabras clave: GeoGebra; actividades dinámicas; límite; derivada; integral definida.

ABSTRACT

The work with the concepts of higher mathematics that involve processes of successive approximations, as it is properly the limit of a function in a point, as well as the derivative of a function in a point and the defined integral, among others, faces the challenge of showing their intrinsic dynamics, a reality that is independent of the means used in the teaching-learning process that takes place, although one would expect better possibilities of being able to reflect it using means such as those that can be elaborated with GeoGebra. In this sense, the objective of this work is to present activities elaborated with this software for the introduction of the concepts mentioned before, where the options of movement and dynamic colors are key to reinforce the approximation ideas. There are three activities for the functional limit, one of which interprets this concept according to Cauchy, four for the derivative, one based on the notion of tangent line and the other based on the concept of instantaneous velocity. In the case of the defined integral, seven activities are presented that show the relevant role of the rectangles in the intuitive notion of area, as well as the need for a step-to-limit process to define and determine the area of regions with part of the curved border. Versions of some of these activities were developed as part of the functions of the authors as tutors in the Republic of Angola.

Keywords: GeoGebra; dynamic activities; limit; derivative; definite integral.

1. INTRODUCCIÓN

Captar la dialéctica que se encierra en el concepto de límite de una función real de una variable real en un punto, como un proceso de causa - efecto, es esencial para comprenderlo, así como a todos los conceptos que se definen utilizándolo directa o indirectamente; entre ellos el de función continua en un punto, el de derivada de una función en un punto, el de integral definida y el de integral impropia. Lograr entender la dinámica intrínseca de los procesos de aproximaciones sucesivas presentes en todos ellos, se constituye entonces en uno de los desafíos principales que enfrentan los estudiantes, y sus profesores, durante el desarrollo de los contenidos de Cálculo Diferencial e Integral en $\mathbb{R}$, que es el núcleo alrededor del cual se articula casi la totalidad de la disciplina Matemática Superior (este pudiera no ser el nombre en todos los casos) en carreras de Ciencias Económicas, Agropecuarias y Técnicas.

Dado que en la mayoría de las carreras que incluyen una disciplina de formación matemática el concepto límite funcional es el único que se trata, o usualmente precede al de límite de una sucesión (a fin de cuentas, también una función), la definición que prevalece o se formula es la de Cauchy, en la que se emplea el llamado lenguaje épsilon - delta: $\varepsilon - \delta$. No obstante, antes de presentarla es común que se consideren en los textos las llamadas definiciones preliminares o intuitivas, de carácter provisional. Eso es lo que ocurre, por ejemplo, en el *Cálculo Infinitesimal* de Michael Spivak (Spivak, 1989, p. 99):

> "**DEFINICIÓN PROVISIONAL**
> La función f tiende hacia el límite l cerca de a, si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de l haciendo que x esté suficientemente cerca de a, pero siendo distinto de a".

Observar que la reimpresión que se consulta de ese libro de Spivak se basa en una edición de 1970, así que se podría suponer que esa tendencia se modificó en la actualidad, casi 50 años después, pero ese no parece ser el caso. En efecto, en el *Cálculo con Trascendentes Tempranas*, de James Stewart, sumamente importante por su contenido y porque actualmente es texto básico en Cuba (y en otros países) para las carreras de Ciencias Técnicas, la definición *intuitiva* o *preliminar* de límite toma la siguiente forma:

> "**Definición** Escribimos
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
> y decimos "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"
> si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como deseemos) tomando x lo bastante cerca de a, pero no igual a a".

Inmediatamente después se anuncia que "en la sección 2.4 tendremos una definición más precisa" (Stewart, 2009, p. 91).

No cabe reproche alguno a estos u otros autores; ellos intentan lo mismo que cada profesor que lo imparte en un aula: conseguir que se comprenda un concepto importante, cuyas ideas esenciales fueron utilizadas por los antiguos matemáticos griegos y que su definición rigurosa, debida a Cauchy (1789 – 1757) en las primeras décadas del siglo XIX, no le fue posible formularla a Newton (1642 – 1727) y tampoco a Leibniz (1646 – 1716), reconocidos como los fundadores del Cálculo Infinitesimal y considerados entre los más brillantes matemáticos de la Historia (Ribnikov, 1987).

Tácitamente se está asumiendo que hay una complejidad intrínseca al trabajar con este concepto y por eso la realidad es que no siempre se logra que los estudiantes lo comprendan, aunque les sea posible reproducir su definición y aprendan procedimientos eficientes de cálculo analítico de límites. Es la misma situación que se tiene con los conceptos que lo utilizan para definirse, en particular los de derivada de una función e integral definida de una función continua en un intervalo cerrado. En el mejor de los casos se consigue que aprendan a calcular derivadas e integrales; incluso a aplicarlas en situaciones normalizadas o típicas, pero en ocasiones no se logra siquiera reconocer que podrían ser utilizadas en otros muchos contextos en los que se plantean problemas y situaciones que se modelan con ellas.

Una vía que siempre se utiliza para tratar de comprender estos conceptos es la de acudir a sus significados e interpretaciones desde el punto de vista geométrico. La cuestión es que las representaciones geométricas

que aparecen en cualquier texto tradicional (en copia dura) son forzosamente estáticas, mientras que los procesos que tratan de representar están caracterizados esencialmente por el movimiento y el cambio. Una posibilidad para tratar de reflejar y poder captar esa dinámica es la de utilizar medios didácticos que están disponibles, elaborados utilizando softwares de Geometría Dinámica, como es GeoGebra, que permiten ilustrar la aproximación ilimitada de una cantidad variable a su límite. Por ejemplo, basta visitar el sitio Web www.geogebra.org y en él es posible encontrar muchos medios específicos para esos propósitos. La cuestión que emerge es la de discernir cuáles son los más adecuados, dado que existe un problema de abundancia de medios y la dificultad deriva entonces a *cómo* encontrar los más adecuados.

Se configura entonces un problema asociado de *búsqueda*, lo que define una posible dirección de trabajo, que se puede formular así: *cómo acceder a medios adecuados y a las mejores prácticas de utilización de los mismos para el trabajo dentro y fuera de la clase de Matemática*. Al propio tiempo, otra vertiente que hay que considerar de manera natural es la de tratar de hacer aportaciones en la creación de medios didácticos, un problema de *producción* que se puede plantear en los siguientes términos: *elaborar medios propios y concebir buenas prácticas para su utilización, para luego ponerlos a disposición de la comunidad de profesores de Matemática y de sus estudiantes*. Es en este sentido que apunta la propuesta que se hace en este trabajo, cuyo objetivo es presentar una colección de actividades dinámicas elaboradas con GeoGebra para la introducción y el trabajo con los conceptos límite funcional, derivada de una función en un punto e integral definida de una función continua en un intervalo cerrado.

2. METODOLOGÍA

El trabajo es un conjunto de actividades dinámicas elaboradas con GeoGebra (versión 5.0.280.0-3D) para trabajar con los conceptos límite funcional, derivada de una función en un punto e integral definida de una función continua en un intervalo cerrado. La idea básica presente es la de *aproximación*, que se aborda en cada actividad desde tres ópticas complementarias: la primera *geométrica*, que permite representar un objeto en movimiento, como puede ser la recta secante a través de dos puntos de la gráfica de una función, uno de ellos variable, aproximándose o transformándose cada vez más, y tanto como se quiera, a su posición o forma límite (en este caso a la recta tangente por el punto fijo) cuando varía ese punto, o bien observando un polígono regular inscrito en una circunferencia que se aproxima tanto como se desee al círculo limitado por ella, cuando aumenta ilimitadamente la cantidad de lados. La segunda es la *numérica*, que en los ejemplos aducidos permite observar simultáneamente cómo los correspondientes valores de las pendientes, cuando se trata de las secantes, se aproximan al valor de la pendiente de la tangente, o en el caso de los polígonos y el círculo mostrar la aproximación de los valores del área de los primeros al área de este último. Finalmente, la tercera la brinda el *color*, ya que utilizando la propiedad avanzada de colores dinámicos (que se puede atribuir a cualquier objeto en la vista gráfica de GeoGebra) se consigue reforzar la idea de aproximación ilimitada de un objeto variable, y de la magnitud que le caracteriza, a sus límites respectivos, al permitir la transformación o tránsito gradual desde un color inicial hasta el color final fijo.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se elaboraron tres actividades para el caso del límite de una función real de una variable real en un punto o número real x_0. Una dedicada a la interpretación geométrica del concepto según Cauchy y dos a los límites fundamentales, exponencial y trigonométrico. Esta última se publicó y está disponible en el sitio www.geogebra.org.

Cuatro son las actividades para la derivada, dos de ellas para introducir el concepto, una basada en el problema de la recta *tangente* a una curva en uno de sus puntos y la otra con fundamento en el problema de la *velocidad*; las restantes permiten ilustrar o explorar los teoremas de Lagrange y Fermat (el objetivo es *ilustrar* cuando estos teoremas son establecidos con antelación a la ejecución de la actividad, o para tareas de *exploración* si la intención fuera formularlos después. El uso que se les dé depende entonces de la situación y objetivos didácticos que se definan). La dedicada al teorema de Lagrange también se publicó en el sitio Web mencionado, mientras que las otras son versiones de algunas que se utilizaron en una tesis de licenciatura desarrollada en la República de Angola (Mahuma, 2015).

Por último, las actividades para el trabajo con la integral definida son siete, todas utilizadas en otra tesis de licenciatura en Angola (Chicolassonhe, 2015) y que se clasificaron por sus objetivos y contenidos en tres categorías.

Las dos primeras permiten utilizar la conocida fórmula para el área de un rectángulo para deducir la fórmula para el área de un triángulo de base b y altura h, para luego mostrar que es posible usar reiteradamente esta última para determinar el área de cualquier región plana que esté limitada por una poligonal cerrada. Los objetivos son, en primer lugar, resaltar el papel de la fórmula para el área de un rectángulo, porque se utilizará luego de manera sistemática en la formación de las sumas integrales y, en segundo lugar, aclarar que el problema del área de una región plana como la mencionada no existe en principio, toda vez que es resoluble de forma elemental, por su reducción al cálculo de las áreas de los triángulos en los que siempre se puede descomponer cualquier región plana cuya frontera esté formada por la unión de un número finito de segmentos de recta consecutivos.

Con la tercera actividad se tiene el propósito de lograr que se perciba que, si una región no tiene toda su frontera limitada por segmentos de recta, entonces se requiere definir y determinar su área con la ayuda de un proceso de aproximaciones sucesivas; es decir, mediante un límite adecuado. Para este objetivo se "dedujo" la conocida fórmula $A = \pi r^2$, que permite calcular el área de un círculo de radio r, mediante la inscripción en la circunferencia que lo limita de un polígono regular, para después hacer crecer su cantidad de lados desde $n = 3$ hasta el valor que se considere necesario, pues aunque se limitó el correspondiente deslizador hasta $n = 40$, es fácil aumentarlo si así se desea.

En la cuarta actividad se utiliza el requerimiento de un proceso de aproximaciones sucesivas para formular el problema de *definir* y *calcular* el área de un trapecio curvilíneo, región plana que, en general, tiene curva la parte de la frontera limitada por la gráfica de la función en el intervalo que se haya definido.

En la quinta actividad se presentan tres ejemplos de trapecios curvilíneos, definidos por las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$, $g(x) = e^x$ en $[0, 1]$ y $h(x) = x^2$ en $[0, \sqrt{2}]$.

En las actividades seis y siete se trabaja con el concepto *integral definida*. En la seis de forma "general", con una función continua y positiva "cualquiera", en un intervalo "arbitrario" $[a, b]$, utilizando las opciones de sumas integrales inferior y superior, disponibles en GeoGebra. Los entrecomillados tratan de aclarar que en GeoGebra esas palabras no tienen un significado preciso, dado que una gráfica que se visualice en la correspondiente vista representa una función o ecuación concreta, lo mismo que sucede con cualquier otro objeto geométrico, que siempre será específico, no general, arbitrario o cualquiera. En la siete y final se retoman los trapecios curvilíneos que se consideraron en la cinco y se aproximan sus áreas, que de ese modo se constituyen en ejemplos en los que se aplican las ideas básicas del concepto.

En lo que sigue se describen algunas de estas catorce actividades, como una forma de presentar las ideas esenciales que caracterizan la propuesta y la forma en que ellas fueron concebidas.

Actividad dedicada a establecer el Límite Fundamental Trigonométrico: lft.ggb

En la figura 1 aparecen imágenes de dos vistas gráficas de la actividad lft.ggb. A la izquierda la imagen de apertura (si fue guardada así, que es lo que se recomienda). A su derecha la imagen de la vista gráfica que resulta luego de activar tres de las cuatro casillas de control, las dos primeras y la cuarta, en la que se indica hacer tender la variable a cero y que se muestra al seleccionar una cualquiera de las tres primeras.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

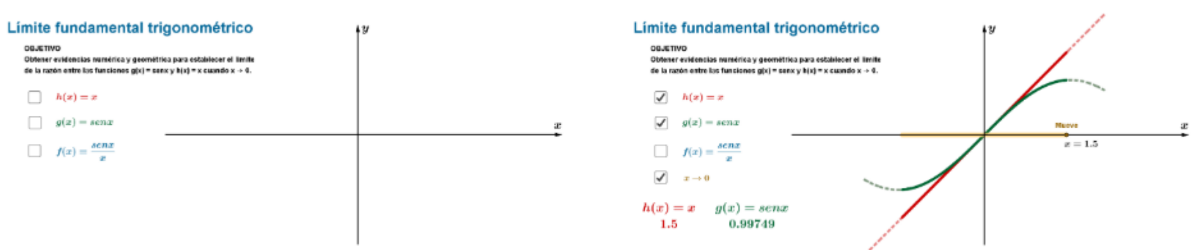

Figura 1. Imágenes de dos vistas gráficas que aparecen durante la ejecución de la actividad lft.ggb.

Cualquier casilla de control entre las tres primeras que se active o seleccione con clic sobre ella hace visible en trazo continuo la gráfica de la función correspondiente en $[-1.5, 1.5]$, o en algún otro intervalo de menor amplitud, también simétrico con respecto a $x = 0$, la mencionada casilla que precede al símbolo $x \to 0$, así como a este propio símbolo. Si esta última también se activa, como se observa en las dos imágenes en la figura 2, se visualizan adicionalmente una reiteración de la expresión analítica de la función (o funciones si son dos o tres las seleccionadas) y debajo de ella (de ellas) el valor (los valores) de esa función (de esas funciones) que toma (que toman) en el extremo derecho del intervalo y una representación de este último, con el texto *Mueve* sobre su extremo derecho, señalado con un punto y debajo el valor de la abscisa. Es claro que se puede explorar el comportamiento cuando $x \to 0$ de una, de dos o de las tres funciones que se pueden considerar al trabajar con este límite, moviendo ese punto para la izquierda. Precisamente, en la figura 2 se presentan una imagen intermedia de la vista gráfica y la imagen que resulta cuando $x = 0$.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

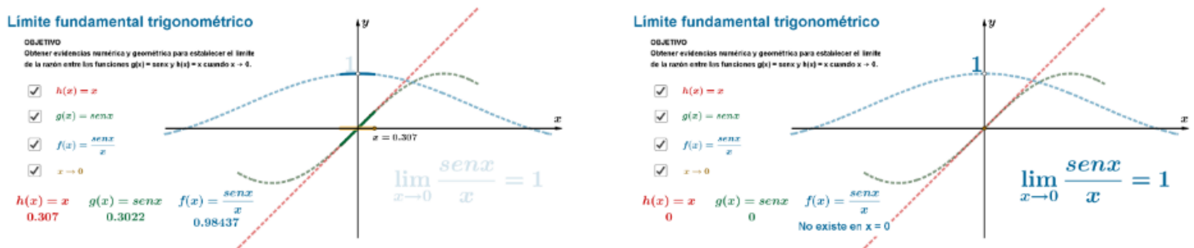

Figura 2. Imagen intermedia (izquierda) y cuando $x = 0$ de vistas gráficas de la actividad lft.ggb.

Con relación a las imágenes en la figura 2, agregar que la expresión que formaliza el límite fundamental trigonométrico, presente en ambas, así como el 1 que señala este valor en el eje de las y, están visibles porque está seleccionada la tercera casilla de control. A estas expresiones, que son textos de GeoGebra, se les definió la opción de colores dinámicos, para conseguir el tránsito gradual desde el color blanco, en $x = 1.5$, y por eso no se ven, hasta el color azul de la gráfica y de la propia expresión analítica de la función en $x = 0$: $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Es por eso que está muy atenuado el color de esos objetos cuando $x = 0.307$. Para conseguirlo se definieron tres funciones $R(x), G(x)$ y $B(x)$ de la abscisa x, en $[0, 1.5]$, que permitieron pasar desde $(1, 1, 1)$, el blanco en la escala RGB que utiliza GeoGebra —la sigla RGB se forma con las iniciales de las palabras Red (rojo), Green (verde) y Blue (azul)—, hasta $(0, 0.4, 0.6)$, que da el *azul* que tienen varios objetos en las figuras 1 y 2. Para $x = 0.307$ ellas toman, respectivamente, los valores que forman el trío $(0.82, 0.89, 0.93)$, que determina el color azul atenuado de esos objetos (imagen a la izquierda).

Actividad dedicada a interpretar geométricamente el límite funcional: limite.ggb

En la figura 3 se incluyen dos imágenes de vistas gráficas de la ejecución de limite.ggb. A la izquierda se aprecia el caso de un valor para δ muy grande (*no sirve* para el ε definido), porque hay una parte de la imagen por f del entorno reducido de x_0 de radio δ que cae fuera del entorno de radio ε del límite L. Así se ilustra que ese δ *no cumple* lo que se plantea en el concepto; es decir, *no es* un δ que existe para ese ε.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

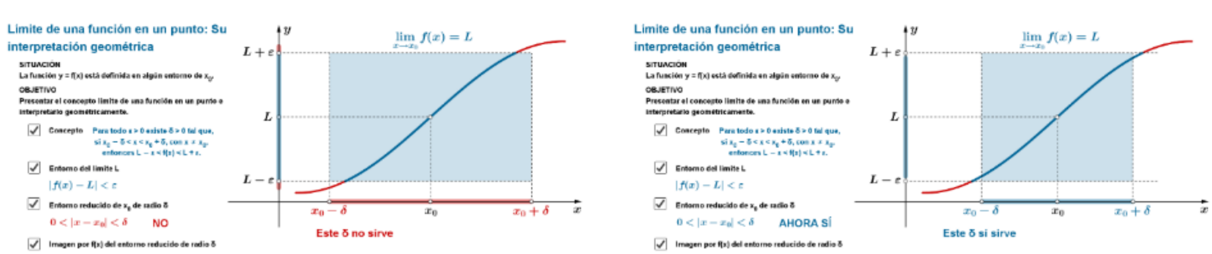

Figura 3. Interpretación geométrica del límite: imágenes de dos vistas gráficas de limite.ggb.

En cambio, en la imagen a la derecha el nuevo valor de δ es adecuado, es uno que *existe* para el mismo ε; ello se consiguió moviendo hacia la derecha el punto correspondiente al extremo izquierdo $x_0 - \delta$ del entorno reducido de x_0, hasta que su imagen por la función quedó contenida en el entorno de L. Si luego se desplaza hacia abajo el punto que corresponde al extremo superior del entorno de L, disminuyendo así el valor de ε, para reproducir la situación que se ilustró a la izquierda en la figura 3, entonces se tiene que disminuir a su vez el valor de δ hasta lograr que sirva a los efectos de la definición (figura 4).

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

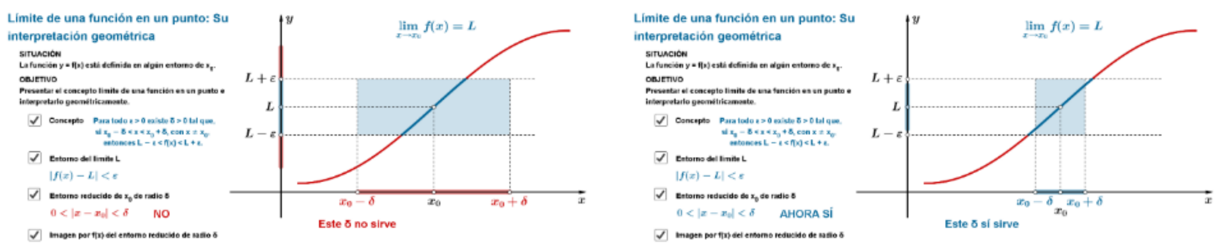

Figura 4. Dos nuevas vistas gráficas de limite.ggb: dinámica causa - efecto del límite funcional.

La actividad limite.ggb es portadora de la dinámica causa - efecto propia del límite funcional, muy difícil de mostrar en un texto tradicional o en la pizarra y que se ha tratado trasmitir en las figuras 3 y 4. Se considera que su utilización en ambientes controlados inicialmente por el profesor pudiera hacer una contribución a la comprensión y aprendizaje de este importante concepto. Agregar que la actividad para el trabajo con el Límite Fundamental Exponencial es similar a la dedicada al Límite Fundamental Trigonométrico, que ya fue descrita.

Actividades para introducir la derivada de una función en un punto: tangente.ggb y velocidad.ggb

Atendiendo a la relevancia del concepto de derivada de una función en un punto, y como parte de una tesis de licenciatura que se defendió en 2015 en la República de Angola (Mahuma, 2015), se elaboraron dos actividades para el trabajo introductorio con el concepto y dos para exploración de los teoremas de Fermat y Lagrange. La figura 5 contiene cuatro imágenes de vistas gráficas de la actividad tangente.ggb, en la que se trabaja el conocido problema de la tangente a la gráfica de una función en uno de sus puntos.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

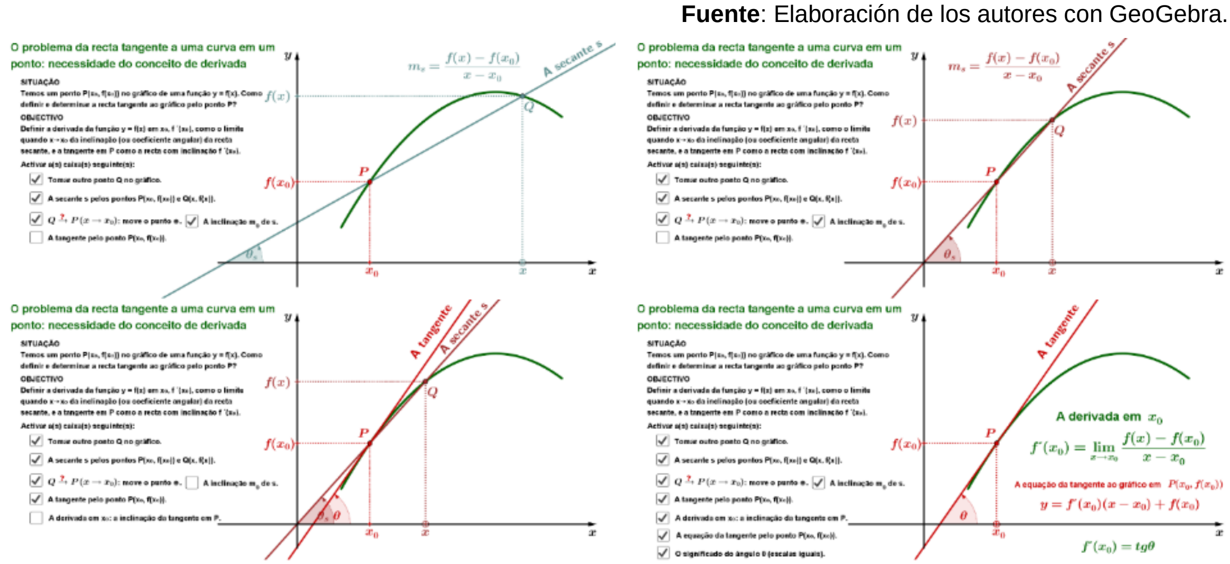

Figura 5. Imágenes de vistas gráficas de tangente.ggb: las secantes se aproximan a la tangente.

Algunas cuestiones importantes a resaltar de los hechos que se pueden apreciar en las cuatro imágenes que forman la figura 5 se exponen a continuación.

Esas imágenes son *similares* a las que se pueden encontrar en cualquier texto en el que se trate el concepto de derivada de una función en un punto, aunque son *distintas*. En efecto, sucede que ellas tratan de trasmitir la dinámica que caracteriza la ejecución de la actividad tangente.ggb. La construcción se modifica cuando se mueve el punto que en el eje de las abscisas corresponde a la variable x; al moverlo para la izquierda (al hacer que $x \to x_0$) se mueven simultáneamente muchos de los objetos presentes, cada uno hasta su posición límite (incluido el texto *A secante* que "tiende" al texto *A tangente*). Al propio tiempo, utilizando la propiedad de colores dinámicos, que se define en función de x, se aprecia que el color de todos los objetos variables también "tiende al color límite" que tienen la tangente y otros objetos fijos, como es el ángulo de la tangente con el eje de las x, por ejemplo. Observar que aunque se pretende ilustrar el caso general, la abscisa del punto que corresponde a x tiene un valor específico en cada posición que asuma, así como la propia curva es la gráfica de una función concreta que no es de interés indicar aquí.

Una actividad que se caracteriza por el mismo dinamismo de tangente.ggb es velocidad.ggb, que como es usual en el trabajo con el concepto de derivada, también sirve al propósito de arribar al límite del cociente de incrementos. Una imagen de una vista gráfica de su ejecución aparece en la figura 6.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

Figura 6. Imagen de una vista gráfica con todas las opciones durante la ejecución de velocidad.ggb.

En la imagen de una vista gráfica de velocidad.ggb que aparece en la figura 6, se observa que todas las casillas de control están seleccionadas. Lo preferible es acceder gradualmente a la información, activando inicialmente la casilla que precede al texto Lei do movimento, que es lo único visible al inicio, junto con la información general que está sobre ella: el título, la situación que se considera y el objetivo de la actividad. Los restantes objetos van apareciendo al ritmo que desee e imponga el que la ejecuta.

Actividad dedicada a ilustrar o explorar el teorema de Lagrange (de la media): Lagrange.ggb

Uno de los teoremas más importantes del Cálculo Diferencial es el teorema de Lagrange. Su formulación analítica tiene una clara interpretación geométrica: por un punto, al menos, de la gráfica de una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, derivable en su interior (a, b), la tangente es paralela a la cuerda por los extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Para observar esa interpretación geométrica, o bien para actividades exploratorias previas a su formulación, se elaboró la actividad Lagrange.ggb, que está disponible en el sitio www.geogebra.org. Imágenes de vistas gráficas de su ejecución se presentan en la figura 7. Nuevamente son varios los recursos que se utilizan para reforzar la idea de aproximación ilimitada de un objeto variable (en este caso la tangente) a su posición límite (la propia tangente, pero paralela a la secante).

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

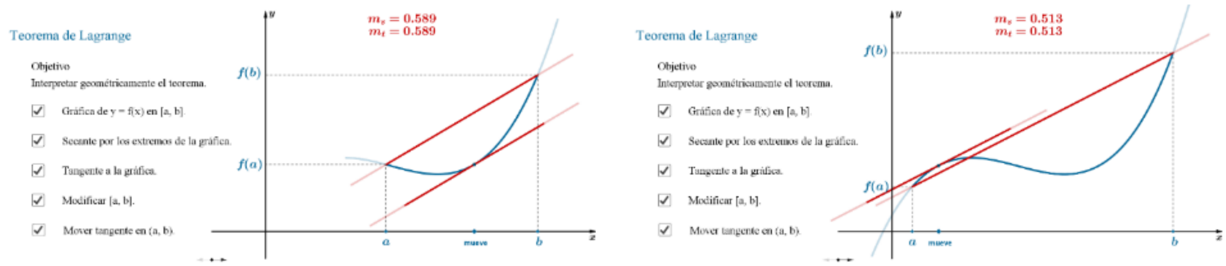

Figura 7. Imágenes de dos vistas gráficas de Lagrange.ggb: la tangente es paralela a la secante.

Como debe quedar claro de la figura 7, una parte de la construcción depende de la abscisa del punto de la gráfica por el que se traza la tangente. Esa abscisa está entre a y b, extremos que también se pueden modificar, como se indica en una de las casillas de control. Ese punto variable en el eje de las x, que tiene debajo el texto *mueve*, permite localizar el punto (imagen a la izquierda) o los dos puntos (es el caso cuya imagen se representa a la derecha, aunque ahí solo se observa uno), donde la recta tangente es paralela a la secante. Notar que las pendientes están visibles y por eso puede apreciarse que son iguales y que tienen el mismo color. No obstante, tanto la tangente como su pendiente m_t tienen definida la opción de colores dinámicos, así que el hecho de que asuman el color de la secante (y de su pendiente m_s) al tenerse el paralelismo, formalizado con la igualdad numérica $m_t = m_s$, son aspectos que refuerzan la información que se pretende trasmitir: existe un punto, por lo menos, donde la tangente es paralela a la secante.

El "vector funcional" de $\mathbb{R}^3$ $(0.8(1-abs(m_s - m_t))^{54}, 0, 0)$, donde abs indica tomar el valor absoluto, permitió definir el color dinámico de esos objetos. El número 54 no es nada especial, es simplemente un exponente "grande" (servirían 40 o 60 o alguno otro similar) que tiene el propósito de conseguir que la componente roja esté muy próxima a cero incluso cuando el módulo de la diferencia $m_s - m_t$ sea relativamente pequeño, lo que da para la tangente un color muy cercano al negro, de manera que las tonalidades rojas aparecen muy próximas a los puntos donde se cumple el teorema. Si fuera $m_s - m_t$ igual a 0.1 en valor absoluto, el trio de valores es $(0.003, 0, 0)$, lo que da prácticamente el negro. Si se quisiera conseguir que las tonalidades rojas aparecieran más "lejos", por considerarse más adecuado, se tendría que tomar un exponente menor, probando con algunos valores específicos hasta lograr satisfacer este deseo. Notar que la componente roja en $(0.8(1-abs(m_s - m_t))^p, 0, 0)$ siempre es 0.8 cuando $m_t = m_s$ cualquiera sea el exponente p.

Una lógica de funcionamiento similar tiene la actividad Fermat.ggb, concebida para ilustrar o explorar el teorema de Fermat, que es clave en la investigación de los máximos y mínimos de una función.

Actividades para la introducción de la integral definida: descripción de integrald.ggb

Ya se señaló que para el trabajo con el concepto integral definida se elaboraron siete actividades, que por sus objetivos se clasificaron en tres categorías. De ellas se describirá el funcionamiento de integrald.ggb, en la que se introducen las ideas básicas del concepto; en la figura 8 se presenta una composición con partes de varias imágenes de distintas vistas gráficas que aparecen durante su ejecución.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

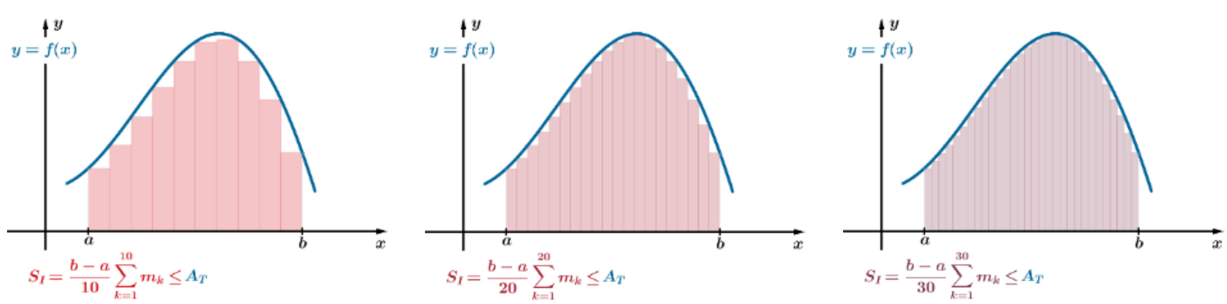

Figura 8. Aproximación del área del trapecio curvilíneo T mediante sumas integrales inferiores.

Notar que en las imágenes que forman la figura 8, como pretenden ilustrar al caso "general", no se incluyen los valores de las áreas dadas por las sumas integrales inferiores (está claro que cada una tiene un área específica), pero se sustituyeron con las expresiones analíticas que las definen. Lo que si está visible es la *aproximación* de la forma de cada figura escalonada al trapecio curvilíneo límite, así como la "tendencia" del color de esas figuras escalonadas, y el de las sumas que dan sus áreas, al color común de esa región y de su área A_T (ese trapecio curvilíneo "general" se introduce en otra actividad y se retoma en esta).

Además de la opción de aproximación con sumas inferiores, en la actividad integrald.ggb se contempla también hacerlo con las sumas integrales superiores; en la figura 9 aparece una composición con imágenes de partes de algunas vistas gráficas. Caben comentarios similares a los realizados sobre la figura 8.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

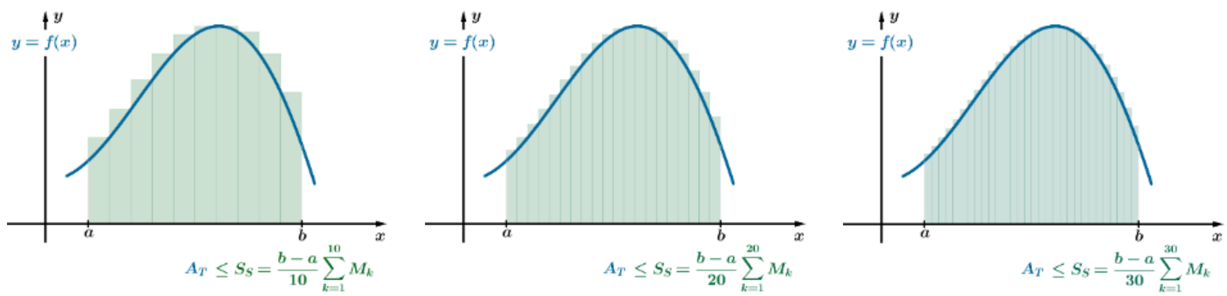

Figura 9. Aproximación del área del trapecio curvilíneo T mediante sumas integrales superiores.

Finalmente, en la figura 10 se aprecia una imagen con la aproximación al área del trapecio curvilíneo por ambos lados, así como otra que, además, incluye todas las opciones e informaciones disponibles.

Fuente: Elaboración de los autores con GeoGebra.

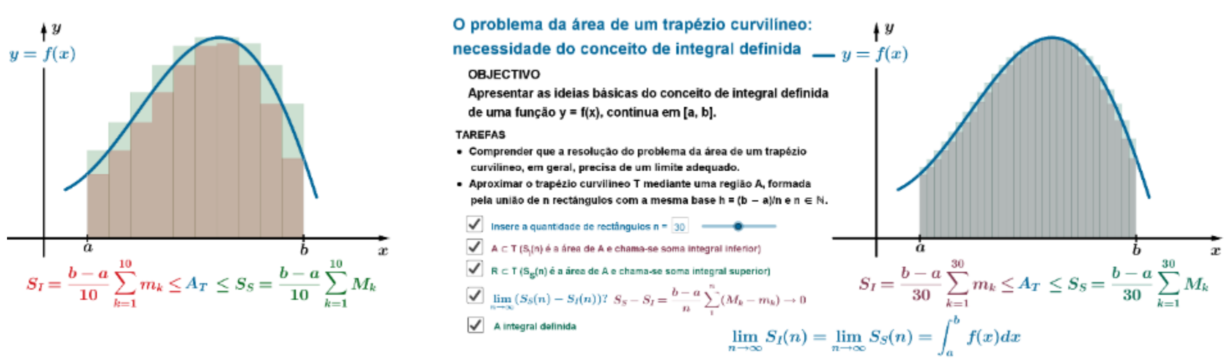

Figura 10. El área A_T del trapecio curvilíneo, la integral definida, está entre ambas sumas integrales.

Se considera que esta actividad es portadora de las ideas básicas del concepto integral definida, para el caso de una función continua en el intervalo de integración, cuya utilización en ambientes de aprendizaje inicialmente controlados por el profesor, en momentos adecuados y en armonía con otros medios didácticos que estén disponibles, pudiera favorecer su comprensión y aprendizaje. Sus posibilidades dinámicas, que apuntan desde varias direcciones al refuerzo de la noción de aproximación, son aspectos a destacar. El trabajo con este medio para la integral definida se sugiere llevarlo a cabo de conjunto con las otras seis actividades elaboradas para similar propósito.

Resta observar que en integrald.ggb se trabaja con una función continua en un intervalo en el que se define una partición que determina intervalos parciales de igual amplitud; esto no supone una pérdida de rigor o de generalidad. En definitiva, ese es el enfoque que se sigue en *Cálculo con Trascedentes Tempranas*, que ya se mencionó es el texto básico para las carreras de Ciencias Técnicas en Cuba. Si la integral existe

en $[a, b]$, como es el caso por asumirse que la función es continua, se puede tomar cualquier partición de este intervalo, siempre que tienda a 0 su norma. Así que la opción que permite obtener intervalos parciales de igual amplitud está disponible y es la más sencilla en la mayoría de los casos. Hay otra razón esencial: esa es la que se utiliza en GeoGebra para las sumas integrales inferior y superior.

4. CONCLUSIONES

En el trabajo se presenta un conjunto de catorce actividades dinámicas elaboradas con GeoGebra. Son aspectos a destacar los siguientes:

1. Para el trabajo con el límite funcional se tienen tres actividades, en una de las cuales se interpreta geométricamente el concepto según Cauchy, con posibilidades de movimiento y animación que pueden favorecer su comprensión como un proceso de causa - efecto. Por su parte, las concebidas para el trabajo con los límites notables incluyen opciones gráficas y posibilidades numéricas difíciles de lograr con medios tradicionales. De ellas, lft.ggb, para el Límite Fundamental Trigonométrico, está disponible en el sitio www.geogebra.org.
2. Para derivadas se concibieron cuatro actividades, dos de ellas para introducir el concepto a partir de los usuales problemas de la tangente y la velocidad; las otras dos para trabajar los teoremas de Fermat y Lagrange, esta última (Lagrange.ggb) está publicada en www.geogebra.org. Es clave en todas ellas la noción de aproximación, la que se refuerza a través del movimiento, la forma, la cantidad y el color variables.
3. Las siete actividades que se presentan para el Cálculo Integral se clasificaron en tres categorías por sus objetivos y contenidos; se sugiere trabajarlas conjuntamente. Entre ellas, la actividad integrald.ggb es clave porque en ella se tratan las ideas esenciales del concepto integral definida. Nuevamente se apela al movimiento, la forma, la cantidad y al color para contribuir a reforzar la idea de aproximación.
4. La utilización de las actividades que se presentan, en armonía con otros medios, puede hacer una contribución a la comprensión y aprendizaje del límite funcional, la derivada y la integral definida, porque al ser conceptos caracterizados esencialmente por el cambio, el movimiento y la aproximación, requieren de estos medios dinámicos, que también poseen esas características.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chicolassonhe, J. (2015). *Introdução do conceito de integral definida utilizando actividades com Software GeoGebra*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Lueji A'Nkonde. Saurimo. Angola.

Mahuma, C. (2015). *Contribuição para a introdução do conceito de derivada de uma função real de uma variável real em um ponto utilizando actividades com GeoGebra*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad Lueji A'Nkonde. Saurimo. Angola.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir. Moscú, URSS.

Spivak, M. (1989). *Cálculo Infinitesimal*. Tomo I. Edición Revolucionaria. La Habana, Cuba.

Stewart, J. (2009). *Cálculo con Trascendentes Tempranas*. Félix Varela, La Habana, Cuba.

SOBRE LOS AUTORES

Rogelio Paulino Acosta González, Licenciado en Matemática, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 1980. Profesor Auxiliar del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.

Luis Enrique Ramos Puga, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero, Holguín, 1990. Profesor Asistente del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.

Maikel Hechavarría Aleaga, Licenciado en Contabilidad y Finanzas, Universidad de Las Tunas, 2004. Máster en Dirección, Universidad de Oriente, 2012. Profesor Asistente del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.