9na CONFERENCIA CIENTÍFICA INTERNACIONAL
Universidad de Holguín

Un medio interactivo como apoyo para graficar funciones con lápiz y papel

An interactive medium as support to graph functions with pencil and paper

Rogelio Paulino Acosta González[1], Maikel Hechavarría Aleaga[2], Luis Enrique Ramos Puga[3].

[1]Universidad de Las Tunas, Cuba, racosta@ult.edu.cu, [2]Universidad de Las Tunas, maikelea@ult.edu.cu, [3]Universidad de Las Tunas, luiser@ult.edu.cu.

RESUMEN

Una de las competencias fundamentales que deben adquirir los estudiantes con el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas superiores es la de graficar, entendida en su sentido más amplio. En particular, y aunque muchos softwares permiten obtener la gráfica de una función real de una variable real, cuando se revisan programas y textos se observa que sigue siendo relevante la tarea de hacerlo con lápiz y papel, para lo que se requiere esbozar la gráfica a partir de las informaciones que aportan la propia función y sus derivadas primera y segunda. Este proceso resulta complejo porque precisa obtener muchos resultados que deben integrarse coherentemente. Si bien existen metodologías en los libros que orientan cómo llevarlo a cabo, la realidad es que subsisten dificultades. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es proporcionar un medio interactivo sobre esta temática, que pueda contribuir al desarrollo de las habilidades que permitan a los estudiantes trazar la gráfica de una función. Consta de siete presentaciones de Power Point en formato pps vinculadas entre sí, formando un hipertexto. La metodología de trabajo se aplica a ocho funciones, que de conjunto son portadoras de todas las características posibles; de cada una se investigan trece aspectos (dominio, asíntotas, extremos, etc). La gráfica se construye paso a paso y en cada momento se anticipan resultados y comportamientos sobre la base de la información disponible. Se corrigen errores e insuficiencias de una versión del trabajo que se ha utilizado durante los últimos quince años.

Palabras clave: graficar funciones; medio interactivo; competencias.

ABSTRACT

One of the fundamental competences that students must acquire with the development of the teaching-learning process of higher mathematics is to graph, understood in its broadest sense. In particular, and although many softwares allow to obtain the graph of a real function of a real variable, when revising programs and texts it is observed that the task of doing it with pencil and paper is still relevant, for which it is required to sketch the graph from the information provided by the function itself and its first and second derivatives. This process is complex because it requires obtaining many results that must be integrated coherently. Although there are methodologies in the books that show how to carry it out, the reality is that difficulties remain. Therefore, the objective of this work is to provide an interactive medium on this subject, which can contribute to the development of skills that allow students to plot the graph of a function. It consists of seven PowerPoint presentations in pps format, linked together, forming a hypertext. The work methodology is applied to eight functions, which together are carriers of all possible characteristics; of each one, thirteen aspects are investigated (domain, asymptotes, extremes, etc). The graph is constructed step by step and in each moment results and behaviors are anticipated based on the available information. Errors and inadequacies of a version of the work that has been used during the last fifteen years are corrected.

Keywords: to graph functions; interactive medium; competences.

1. INTRODUCCIÓN

En su tesis doctoral Raúl Delgado defiende que en los cursos de Cálculo Diferencial en una variable— componente clave de las disciplinas de Matemática Superior que forman parte de los currículos de muchas carreras universitarias— todos los problemas que se consideran se pueden clasificar en cuatro categorías básicas: *aproximar*, *optimizar*, *graficar* y *comparar* (Delgado, 1999).

Se pueden aceptar como válidos los argumentos que allí expone y asumir lo mismo, o se puede tratar de fundamentar la inclusión de alguna otra categoría para rebatirlo, pero lo cierto es que en cualquiera de esos problemas que se considere, son importantes todas las circunstancias que lo rodean, porque su resolución requiere y moviliza una amplia variedad de herramientas, conceptos y procedimientos, que se tienen que integrar con mucha coherencia para llevarlo a término satisfactoriamente, lo que supone un profundo ejercicio de análisis y de síntesis, que a la larga tiene repercusión significativa en el proceso de formación de cada profesional, al margen del quehacer matemático de que se trate, sin ignorar lo que es esencial: la importancia intrínseca que tiene la resolución de estos problemas, tanto al interior de la Matemática como en sus múltiples aplicaciones.

Aunque la graficación con tecnología es una realidad que marca tendencia en la actualidad, caracterizada por el creciente uso y la proliferación de dispositivos de la más diversa naturaleza en manos de los estudiantes, así como por la disponibilidad de softwares y aplicaciones para ese propósito, es un hecho que todavía se considera que es relevante desarrollar la capacidad de hacerlo con lápiz y papel. Es la situación que se presenta en cualquier otro nivel de enseñanza, con otros contenidos; a fin de cuentas, todavía se procura que los niños y jóvenes aprendan a localizar en un mapa y a realizar las más diversas operaciones por sí mismos, aunque ciertamente las aplicaciones en los celulares, u otros dispositivos, lo hagan más rápido y mejor; parece que no se renunciará a tratar de lograr que los niños y jóvenes del futuro desarrollen aprendizajes como esos.

Al revisar libros de texto y programas de disciplinas de Matemática Superior, incluso en las versiones más recientes, se obtiene evidencia que recalca la importancia que se concede a la capacidad de graficar a mano. En calidad de ejemplo puede servir lo que sucede en Cuba, donde en muchas carreras se ponen en práctica nuevos planes de estudio. En particular, en el Plan E de la carrera de Ingeniería Industrial, en el punto 3.5.4, al declarar los contenidos de la disciplina Matemática Superior, específicamente donde se relacionan los conocimientos esenciales a adquirir, se señalan las aplicaciones de la derivada al *trazado de gráficas*. Esto se precisa al incluir, entre las habilidades principales a dominar, la de *aplicar la derivada al trazado de la gráfica de una función de una variable real* (Cuba. Ministerio de Educación Superior, 2018).

El problema relativo a la construcción de la gráfica de una función real de una variable real, dada la expresión analítica que la define, usualmente está incluido en una asignatura de primer semestre de primer año, de manera que el estudiante que tiene que hacerlo lleva apenas unos meses en la universidad o bien, con la clara intención de retornar a este hecho más adelante, con otra formulación: hace meses, quizá muchos meses o incluso años, él estaba en un aula de preuniversitario o alguna otra entidad educativa de nivel similar, de manera que se ha estado enfrentando a unos contenidos que sistemáticamente le están imponiendo el reto de usar herramientas y conocimientos que estudió durante su formación previa.

Atendiendo a la relevancia del proceso de construir la gráfica de una función a partir de las informaciones que de ella se obtienen, así como de las que aportan sus derivadas primera y segunda y reconociendo que puede resultar complejo para muchos estudiantes, se presenta un medio interactivo que sirve de apoyo para esa tarea. No se ignora que en los textos disponibles existen metodologías adecuadas, como la que se encuentra en el libro *Cálculo con Trascendentes Tempranas* (Stewart, 2009), que es el texto básico en Cuba para las carreras de Ciencias Técnicas, que orientan a los estudiantes sobre los pasos a seguir para construir la gráfica de una función, señalando en cada uno qué características o propiedades se deben determinar y cómo ellas se reflejan en la gráfica. No obstante, todas esas metodologías, a fin de cuentas, contienen esencialmente la misma secuencia de trabajo y utilizan las mismas herramientas, de manera que no es esa la dirección en la que apunta la propuesta que se hace.

En el trabajo que se presenta, se aprovechan las posibilidades de animación de Power Point para elaborar un tutorial, en la forma de un hipertexto con muchas prestaciones y facilidad de acceso a las mismas, lo

que le confiere un grado de interactividad que facilita el trabajo con él, y cuya utilización sistemática puede favorecer el desarrollo de las habilidades que se requieren para lograr en muchos estudiantes la capacidad de construir la gráfica de una función con lápiz y papel, además de que los archivos que lo forman pueden servir como bibliografía complementaria cuando se trabajen los conceptos y procedimientos que después se requieren para la construcción de una gráfica.

2. METODOLOGÍA

El trabajo es un hipertexto, que actualiza una versión anterior en uso desde el año 2004 en la Universidad de Las Tunas y otras instituciones, que sirve como medio de apoyo para la graficación con lápiz y papel. Para su elaboración se mantiene la filosofía de trabajo, caracterizada por el hecho de conseguirse un medio interactivo en el que se aprovechan las posibilidades de animación de las versiones de Power Point desde la xp hasta las más recientes. Se utilizan sistemáticamente hipervínculos y acciones condicionadas, dando a los estudiantes y sus profesores muchas posibilidades para su empleo en distintas circunstancias y ambientes de aprendizaje. Consta de un archivo principal y seis secundarios, todos en formato pps.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Antes de precisar las características y funcionamiento del medio que se presenta, y de tratar de justificar el porqué de su creación, y antes de exponer el papel que podría desempeñar como apoyo al trabajo de los estudiantes para graficar con lápiz y papel, en lo que sigue se señalan algunas de las causas que se considera están provocando las insuficiencias que manifiestan los estudiantes cuando enfrentan esa tarea.

Dificultades a la hora de graficar a mano y algunas posibles causas

Conseguir un esbozo satisfactorio de la gráfica de una función, en particular de alguna que en su expresión analítica contenga expresiones con funciones trascendentes, es una tarea que puede resultarle muy compleja a una parte considerable de los estudiantes, lo que se manifiesta en las dificultades que se detectan durante el trabajo en el aula, la revisión de la actividad independiente y la ejecución del sistema evaluativo.

Una causa que se puede señalar para tratar de explicar esas dificultades está en la complejidad intrínseca para graficar, motivada quizá por el propio hecho, ya señalado, de requerir de una amplia variedad de herramientas de análisis, tanto a nivel elemental, a partir de la propia expresión que define a la función, como las que implican el cálculo y uso de las derivadas primera y segunda, con el propósito de determinar características, propiedades y comportamientos de la función que son relevantes en su gráfica, lo que a su vez precisa de muchos conceptos, que no siempre se han aprendido o interpretado correctamente, pero que tienen que recuperarse para aplicarlos.

En relación con los argumentos anteriores, señalar que en algunos trabajos de investigación se resaltan dificultades que tienen los estudiantes para transferir resultados entre los distintos registros semióticos de representación de objetos matemáticos, una teoría desarrollada por Raymond Duval (citado por Macías, 2014), como son para una función la representación analítica, la tabular o numérica y la gráfica.

Esa teoría puede explicar el hecho hipotético, pero mucho más frecuente de lo que se pudiera desear, de un estudiante que tiene ante sí la gráfica de una función elemental básica, como puede ser $f(x) = \cos x$, por ejemplo, y pregunta qué valor toma en $x = 0$, o en algún otro argumento axial (como son $\pi/2$, π, etc.); lo hace porque no tiene desarrollada la capacidad para transferir la información disponible desde el registro gráfico al analítico o numérico.

En el caso de los estudiantes cubanos de preuniversitario que luego acceden a los cursos diurnos, la existencia de la prueba de ingreso de Matemática, la preparación rigurosa que para enfrentarla lleva a cabo la generalidad de ellos, el interés de sus familias y de las instituciones educativas, así como de la sociedad en su conjunto, deberían ser factores que favorecieran sus desempeños en las asignaturas con contenido matemático, incidiendo después a favor de la capacidad para construir una gráfica con lápiz y papel. Desafortunadamente, ese no es el caso en muchos de ellos, ni siquiera en los que ingresan a la universidad apenas cuatro meses después de esa prueba.

Entender por qué esa es la situación, con relación al poco dominio de habilidades y otras carencias de conocimientos para el trabajo matemático, pudiera explicarse comparando las materias que se evalúan en esa prueba de ingreso, con las temáticas y conocimientos que se tienen que recuperar prioritariamente para poder comprender y operar con los contenidos matemáticos que usualmente se desarrollan durante el primer semestre de primer año: funciones y sus límites, derivadas e integrales.

La realidad es que el 60% del contenido de la prueba de ingreso de Matemática, por lo menos, no cae dentro de esas prioridades. Entre estos contenidos están los elementos de Geometría Plana y del Espacio y los problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales. Esto a su vez determina que cada nueva prueba mantenga la estructura inalterable, lo que promueve que la preparación sea cada vez más específica y orientada a anticipar lo que saldrá en ella.

Es posible que exista otro problema asociado con la prueba de ingreso de Matemática, y también con las de Historia y Español. El grado 12 en el preuniversitario debería contribuir esencialmente a asegurar una base mínima de conocimientos y habilidades para trabajar con ellos, con la mira puesta en el éxito del estudiante en el primer año de la universidad. Lo que parece estar sucediendo es que la mayor parte del tiempo se dedica exclusivamente a asegurar una base suficiente de conocimientos y habilidades para que el estudiante sea exitoso en esas pruebas; y ello no está mal, es natural que sea así y es responsabilidad de todos trabajar por conseguirlo; no obstante, ya se hicieron consideraciones en el caso de la prueba de Matemática para mostrar que este último éxito no necesariamente implica al primero.

El estudiante de primer año universitario tiene entonces que recuperar o activar por sí mismo (o, en el mejor de los casos, con poca ayuda) contenidos que recibió hace mucho tiempo, porque se lo demanda la Matemática que está recibiendo, pero que no fueron objeto de preparación suficiente, porque no estaba claro si saldrían o no en la prueba de ingreso o porque se conoce que nunca salen. Por eso quizá no los consideró importantes y prefirió enfocarse (o lo enfocaron) en la igualdad de triángulos y los semejantes, las tangentes a una circunferencia y el teorema de Tales, el teorema de las tres perpendiculares y los problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales, todos contenidos importantes pero que, en genral, no son relevantes para el trabajo con las funciones y sus límites, las derivadas y las integrales.

Si uno busca a lo largo de su desempeño profesional las veces que enfrentó una situación de la práctica que se modele con uno de esos problemas, pero *genuino*, de *verdad*, es posible que aparezca el cero o un natural muy pequeño. En las disciplinas donde se utilizan los sistemas de ecuaciones lineales, lo cierto es que ellos se plantean de manera natural al aplicar ciertas condiciones, de manera que lo esencial debería ser lograr la capacidad de resolver sistemas, no de plantearlos a partir de situaciones completamente alejadas de la realidad, aunque en ellos se aparenta todo lo contrario cuando se formulan.

En resumen, es un hecho que la formación matemática que poseen muchos estudiantes cuando ingresan a una carrera universitaria no es suficiente para enfrentar los requerimientos que impone la matemática que se estudia en este nivel, situación que no parece mejorar con el paso del tiempo. Este es un problema multicausal y que se asume no está resuelto, de manera que lo único que cabe es tratar de hacer las correcciones que sean posibles en cada situación.

La propuesta que se hace en este trabajo es coherente con esta última posibilidad. Con ella se pretende hacer una contribución que redunde en la mejora del desempeño matemático por parte de los estudiantes que cursan el primer año en alguna carrera que lo requiera; en particular, en el desarrollo de las habilidades que le permitan la construcción de la gráfica de una función real de una variable real.

Con bastante certeza, se puede asegurar que el estudiante que domine y aplique todas las herramientas necesarias para trazar satisfactoriamente la gráfica de una función, estará prácticamente dominando la totalidad de los conceptos y procedimientos para operar con ellos que usualmente se le exigen después de un curso de Cálculo Diferencial en una variable, así como apropiándose de una filosofía de trabajo.

Concepción de un medio interactivo como apoyo a la graficación con lápiz y papel

El medio que se presenta es una actualización de un hipertexto, un tutorial para graficar con lápiz y papel, que se ha estado utilizando en los últimos 15 años, elaborado por el autor principal de este trabajo. En él se aprovecharon las posibilidades de animación y otras prestaciones de la versión xp de Power Point, las que se mantienen o mejoran en las posteriores.

Ese trabajo, que se pretende mejorar, utiliza numerosos hipervínculos y desencadenadores de acciones posibles con este software, lo que le permite al usuario acceder con comodidad a otras múltiples opciones. Consta de dos archivos, graficación.pps y aspectos.pps, y contiene las gráficas de 8 funciones, construidas paso a paso, con todo detalle, además de otras prestaciones. No obstante, su diseño en diapositivas con formato 4:3, así como las fuentes y colores utilizados podían mejorarse, aparte de contener algunos errores que debían corregirse. Por lo tanto, el propósito fue el de conseguir un diseño más atractivo, con mejores colores y opciones de acceso, en un formato 16:9, así como eliminar los errores que fueron detectados en el trabajo con esa versión original.

La versión que se presenta utiliza las mismas funciones, porque son portadoras de las características que puede poseer una función elemental, de modo que hay diversidad en los trece aspectos que se consideran (dominio, simetría, periodicidad, intersección con el eje de las y, ceros, signo, asíntotas verticales, oblicuas y horizontales, monotonía, extremos, concavidad y puntos de inflexión), así como en la forma en que cada uno de ellos se determina o se puede determinar. En la tabla 1 aparecen sus expresiones analíticas.

Tabla 1. Funciones cuyas gráficas se construyen. **Fuente**: Elaborada por los autores.

$f(x) = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$	$f(x) = e^{-x^2}$	$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$	$f(x) = \dfrac{4\ln x}{x}$
$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$	$f(x) = (x^2-2x)e^x$	$f(x) = \sqrt[3]{3x^2-x^3}$	$f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

La propuesta se materializa con siete archivos en formato pps. De estas presentaciones, la principal es gráficas.pps, que consta de nueve diapositivas. En la figura 1 aparece una imagen de la primera, aunque no es así como se observa al abrirla, sino después de acceder a la ayuda (con clic en ?), al menú con los trece aspectos que se pueden considerar para trazar una gráfica (clic en ⓘ), y al menú con las expresiones analíticas de las funciones que forman la tabla 1 (clic en f(x)).

Fuente: Elaborada por los autores con Power Point.

Figura 1. Imagen de la diapositiva de apertura de gráficas.pps luego de acceder a todas su prestaciones.

Se observa, en la imagen de esa diapositiva en la figura 1, que se puede optar por seleccionar uno de los aspectos en la barra a la derecha para obtener la información que esté disponible sobre él, que es bastante, o una de las funciones para ver el proceso de construcción de su gráfica. Esas expresiones analíticas de

las funciones están precedidas por un botón con una pequeña imagen de su gráfica (se aspira a que ello se perciba; por lo menos esa fue la intención al diseñarlos), que es una información inicial muy valiosa que puede tomarse en cuenta para decidir elegir una u otra función.

En cada una de las restantes ocho diapositivas se construye paso a paso la gráfica de una de las funciones.

Como una forma de presentar las prestaciones y posibilidades del medio que se propone, lo que a su vez permite exponer la metodología y filosofía de funcionamiento y de trabajo que lo caracteriza, se describirá a continuación el proceso de construcción de la gráfica de la función racional cuya expresión analítica está arriba a la izquierda en la figura 1 (también ocupa esa posición en la tabla 1); en lo adelante se le llamará ejemplo 1. En la figura 2 se incluyen imágenes de la diapositiva dos durante la ejecución de gráficas.pps, que es la que se destinó para la construcción de la gráfica de esa función.

Fuente: Elaborada por los autores con Power Point.

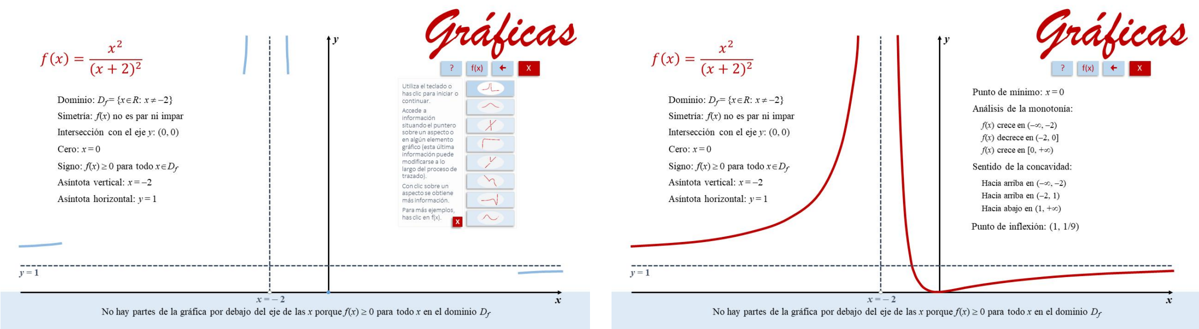

Figura 2. Imágenes parcial y final de la diapositiva dos de gráficas.pps durante la graficación del ejemplo 1.

Una cuestión a resaltar en la imagen a la izquierda en la figura 2 es la ayuda visible, lo que indica que se activó el botón correspondiente situado encima (para cerrarla se hace clic en el situado abajo a su derecha). También se puede observar que se accedió al menú con las funciones, formado nuevamente con imágenes de sus gráficas. Notar que se identifica la que se está construyendo con un diseño distinto.

Constituyen la ayuda varias orientaciones para el trabajo, que se enumeran para facilitar la referencia a ellas durante el análisis.

1. Utiliza el teclado o has clic para iniciar o continuar.
2. Accede a información situando el puntero sobre un aspecto o sobre algún elemento gráfico (esta última información puede modificarse a lo largo del proceso de trazado).
3. Con clic sobre un aspecto se obtiene más información.
4. Para más ejemplos, has clic en f(x).

Las orientaciones 1 y 4 no requieren precisiones. La 2 es clave porque permite acceder a información analítica complementaria a la que se observa en esa imagen. Como se indica en ella, se sitúa el puntero sobre el aspecto *Dominio*, por ejemplo, en el que aparece el dominio de definición de la función cuya gráfica se esté construyendo, que en este caso es el conjunto $D_f = \{x \in R: x \neq -2\}$, y como resultado de ello aparece en pantalla el siguiente texto de carácter inferencial, no confirmatorio:

> **Inferencias**: 1) La función es discontinua en $x = -2$; la paralela al eje y por $x = -2$ es posible asíntota vertical de la gráfica, que consta de dos tramos continuos. 2) La función no es par ni impar. 3) La gráfica corta al eje y pues 0 está en el dominio.

Notar que se plantean o anticipan los comportamientos que cabe esperar si ese es el dominio, no se dan argumentos para justificar por qué es ese conjunto; información en este sentido se obtiene con clic sobre el *Dominio* (ver la orientación 3 de la ayuda), que tiene insertado un hipervínculo para abrir el archivo graf11.pps. Al hacerlo, esta presentación se abre precisamente en la diapositiva en la que se determina el dominio de la función de ese ejemplo 1 (ver figura 3). Se aclara que la posibilidad de mostrar información en pantalla, posible para cualquier hipervínculo, es la que permite exponerla como se indica en la ayuda.

Fuente: Elaborada por los autores con Power Point.

Figura 3. Imagen de graf11.pps (izquierda) al abrirlo con clic en el *Dominio* de la función del ejemplo 1.

En el fichero graf11.pps se trabajan los aspectos *Dominio* e *Intersección con el eje* y. Para ello se destinan 9 diapositivas a cada uno; la primera (la décima) trata, además de la definición del concepto, que se incluye en todas, cuestiones a tener en cuenta y toda la información que se consideró conveniente proporcionar para ayudar en la determinación del dominio de definición (o de la intersección con el eje de las y, si es la diapositiva 10) de una función, así como posibles consecuencias para algunos casos particulares. Como muestra, se transcribe la información sobre el dominio, visible con clic en el botón superior (observar que contiene la frase *ATIENDE A*, como se aprecia en la imagen a la derecha en la figura 2. Esta opción está disponible para los otros doce aspectos en ese menú):

> Para una función elemental $y = f(x)$ es común que el dominio esté formado por un intervalo o una unión de intervalos disjuntos; en cada uno $y = f(x)$ es continua y su gráfica consta de tantos tramos continuos como intervalos disjuntos de amplitud máxima se unen para formar el dominio.
>
> Para funciones que se definen por un cociente, prestar atención a los números que anulan al denominador. Estos números, caso de existir, no forman parte del dominio.
>
> Para funciones en cuyas expresiones aparecen logaritmos tener presente que sus argumentos tienen que ser positivos, de manera que valores de x que conducen a un argumento negativo o nulo de algún logaritmo no forman parte del dominio.
>
> Para funciones en cuyas expresiones aparecen raíces de índice u orden par, las cantidades subradicales no pueden ser negativas, de manera que aquellos números para los que tales cantidades resultan negativas no forman parte del dominio.
>
> Si el dominio no es simétrico con respecto al punto $x = 0$, la función en cuestión no es par ni impar.
>
> Si $x = 0$ no está en al dominio, la gráfica de la función en cuestión no corta al eje de las y.

En cada una de las restantes diapositivas de graf11.pps, de la 2 a la 9, se determina el dominio de una de las funciones cuyas expresiones analíticas aparecen en la Tabla 1. Se reitera que en la diapositiva 10 se comienza el trabajo con la intersección con el eje y (el concepto se define en todas; la 10 contiene su *ATIENDE A*). En las diapositivas de la 11 a la 18 se determina este aspecto a cada una de las funciones.

Con el propósito de precisar la lógica de funcionamiento de estos archivos, se insiste en que al ejecutar el archivo graf11.pps, él se abre en la diapositiva cuya imagen está situada a la izquierda en la figura 3, en la que sí se explica con todo detalle por qué el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \colon x \neq -2\}$; esto sucede así porque se accedió desde este *Dominio*, que aparece durante el proceso de construcción de la gráfica de la función del ejemplo 1 del archivo gráficas.pps. A la derecha en esa figura aparece la imagen de la primera diapositiva, a la que se accede luego de un clic en el botón superior, que contiene el texto *ATIENDE A*.

Existen ficheros similares graf22.pps, graf33.pps, graf55.pps y graf66.pps, cada uno también para trabajar con dos conceptos, con la misma estructura, similares opciones y filosofía de funcionamiento, a los que se accede desde alguno de los aspectos que se haya determinado para alguna de las funciones en el archivo gráficas.pps (también se puede acceder entre ellos). Los restantes tres aspectos (solo uno, asíntotas, pero se consideró conveniente tratar cada tipo por separado: vertical, horizontal y oblicua) se desarrollan en el archivo graf44.pps, el único que tiene 27 diapositivas, 9 para cada asíntota posible.

Si la apertura de uno de estos ficheros se hizo para complementar la información que se tenía sobre uno de los aspectos (ese hipotético aspecto corresponde al *Dominio* en la descripción que se viene realizando) lo natural, una vez obtenida esa información, es regresar para continuar observando el proceso de construcción de esa gráfica; para hacerlo basta cerrarlo con clic en el botón destinado para ello, situado arriba a la derecha, inmediatamente debajo del título *Gráficas*. Otra opción es utilizar el botón al mismo nivel, a la izquierda, para "regresar". El entrecomillado significa que lo que se consigue con clic sobre ese botón realmente es el cierre del archivo, no un regreso, aunque ello sea lo que se aparente, porque no habría forma de saber a dónde hacerlo, toda vez que el archivo desde el que se está tratando de regresar pudo haberse abierto desde muchas ubicaciones distintas.

Además, indicar en relación con esos ficheros, que la barra a la derecha, un menú que se observa en las dos imágenes que forman la figura 3 (también está disponible en gráficas.pps, como se puede apreciar en la figura 1), permite acceder a cualquiera de los trece aspectos para el análisis del comportamiento de una función que fueron relacionados. El cambio de diseño en el botón que corresponde al *Dominio* que se aprecia en esas imágenes precisa que ese es el concepto que se está trabajando. Con clic en algún otro botón de esa barra se puede acceder a otro concepto, que siempre se abre en la diapositiva en la que se presenta información que facilita el trabajo con él (corresponde al *ATIENDE A*), como en la figura 4, en la que se pueden ver las imágenes de las diapositivas de apertura de los archivos graf.22.pps y graf44.pps cuando se abren desde ese menú.

Fuente: Elaborada por los autores con Power Point.

Figura 4. Imágenes de las diapositivas de apertura de graf22.pps (izquierda) y de graf44.pps.

Resta terminar la descripción de la orientación 2, que es clave en la filosofía de trabajo, por lo que se reitera a continuación, donde se resalta en *cursiva* la parte que no se ha explicado:

2. Accede a información situando el puntero sobre un aspecto o *sobre algún elemento gráfico* (*esta última información puede modificarse a lo largo del proceso de trazado*).

La Tabla 2 contiene las tres informaciones asociadas al punto (0, 0) en el ejemplo 1; una de ella será visible al situar el puntero en él, lo que depende del momento en que se haga, así que el punto (geométrico) tiene que estar visible, hecho que ocurre luego de la intersección con el eje y; así se mantiene luego de eso.

Tabla 2. Orientación 2 de la ayuda (puntero sobre el origen). **Fuente**: Elaborada por los autores.

La intersección de la gráfica con el eje de las y es el origen de coordenadas. Como también $f(0) = 0$, se sigue que $x = 0$ también es un cero de la función. La gráfica pasa por este punto.	Como $f(0) = 0$ y la función es positiva a ambos lados de $x = 0$, se sigue que $x = 0$ es punto de mínimo local y absoluto de $f(x)$. La gráfica desciende hasta (0, 0) por la izquierda y asciende a la derecha desde este punto. La derivada es nula en $x = 0$.	Mínimo local y absoluto de $f(x)$. La concavidad está dirigida hacia arriba en $x = 0$ y en un intervalo al que pertenece este número. De la información disponible se sigue que existe un punto de inflexión correspondiente a algún $x > 0$.
Visible desde I_y hasta el Signo	Visible desde el Signo hasta el Mínimo	Visible desde el Mínimo usando $f'(x)$

Es claro que la primera información a la izquierda en la tabla 2 deja de aparecer una vez precisado el signo, de la misma forma que la del centro deja de verse, aunque se pase el puntero por el punto correspondiente al origen, para dar paso a la información a la derecha luego que se haya confirmado el mínimo con ayuda de la derivada. Para conseguir esta funcionalidad se condicionó la aparición en momentos adecuados de pequeños círculos transparentes e insertando a cada uno un hipervínculo (a la propia diapositiva, para que no hubiera efecto indeseado alguno en caso de un clic involuntario), de manera que solo sirvió para generar la información en pantalla que es posible en todo hipervínculo.

Al analizar las modificaciones que se producen en las informaciones asociadas al origen $(0, 0)$ en el caso del ejemplo 1, se puede exponer la concepción para la construcción de una gráfica de que es portadora la propuesta que se hace, en la que predomina el enfoque de utilizar toda la información disponible en un contexto para anticipar comportamientos potencialmente posibles y coherentes con esa hipotética información. Observar que se anticipa que existe el mínimo en $x = 0$ sin utilizar la derivada, solo del conocimiento del signo de la función, aunque la derivada está implícita; se señala que se deberá anular en este número, lo que de hecho constituye un indicador para el control y la regulación. Luego, sin utilizar la derivada segunda, se informa sobre la concavidad y se pronostica la existencia de un punto de inflexión, en algún punto a la derecha de $x = 0$, a partir del conocimiento de que en este último se alcanzó el único mínimo, junto con el comportamiento de la gráfica con respecto a la asíntota horizontal para $x \to +\infty$.

En la imagen que está a la derecha en la figura 2, que culmina la construcción de la gráfica del ejemplo 1, se pueden señalar varias partes con información asociada, similar a la que se ha descrito, aunque ya esa es información final que eventualmente modificó alguna otra, posible en algún paso anterior a la conclusión del proceso de construcción. En las cuatro ramas de la gráfica con comportamiento asintótico, en las dos asíntotas, así como en todas las expresiones analíticas hay información a la que se accede o se puede acceder con el simple acto de situar el puntero sobre ellas.

Disponibilidad y uso del medio

El medio no está disponible fuera de la Universidad de Las Tunas, por el momento, toda vez que se quiere evitar que suceda como en la versión anterior, en la que se comenzó a utilizar antes de su puesta a punto, con versiones incompletas que escaparon al control del autor, que no consideró conveniente trabajar en su perfeccionamiento dada la difusión en muchos lugares de versiones inacabadas o con errores. Por ejemplo, en 2010 se recibió una solicitud de una profesora de la Universidad de La Habana para colocarlo en un sitio Web que utilizaría en un experimento para su investigación conducente al doctorado. Entre 2014 y 2016 el propio autor constató copias entre profesores y estudiantes en la República de Angola.

Para la puesta a punto de esta versión, que se pretende sea mejor, se está coordinando con instituciones con las que mantiene cooperación el departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas, como son el CEMAT, de la Universidad Tecnológica de la Habana (cujae), y la Universidad de Moa, para conseguir una revisión exhaustiva del medio que permita minimizar errores y carencias, así como para evaluar sugerencias.

4. CONCLUSIONES

En el trabajo se presenta un hipertexto concebido para favorecer el aprendizaje por parte de los estudiantes de la construcción de la gráfica de una función a partir de las informaciones que ella aporta, junto con las que provienen de sus derivadas primera y segunda, que es uno de los problemas principales que se tratan de resolver en los cursos que incluyen el Cálculo Diferencial para funciones reales de una variable real, y que es requisito de aprendizaje en muchas carreras. Son cuestiones a resaltar las siguientes:

1. Se evidencian carencias en la formación matemática de muchos de los estudiantes que ingresan cada nuevo curso a carreras que la requieran, lo que limita, en particular, sus posibilidades para el desarrollo de las habilidades para la construcción de la gráfica de una función con lápiz y papel. Ello conforma un problema multicausal, que se asume que no está resuelto y que requiere de un trabajo integral para enfrentarlo, que incluya medios adecuados.
2. Se presenta Gráficas, un medio interactivo que se pone a disposición de estudiantes y profesores. Actualiza una versión anterior, que se ha estado utilizando en los últimos 15 años. En Gráficas se

utilizan sistemáticamente las posibilidades de trabajo y animación de las versiones de Power Point desde la xp hasta las más recientes. Consta de siete archivos, siendo el principal gráficas.pps, desde el que se accede a los restantes. En él se grafican con todo detalle ocho funciones, las que de conjunto son portadoras de las principales características que puede poseer una función y se explotan todas las variantes posibles para determinarlas, para lo que se anticipa la información que es posible determinar en cada momento del proceso a partir de los hechos ya disponibles.

3. Los seis archivos que contienen una revisión detallada de trece conceptos, cada uno de los cuales se define, comenta y aplica en las ocho funciones incluidas en la propuesta, para totalizar 104 ejemplos resueltos, pueden ser utilizados como medios al margen del proceso de trazado de una gráfica, lo que apunta a otros posibles usos de parte de ellos en el nivel universitario y en los precedentes al superior.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cuba. Ministerio de Educación Superior. (2018). *Plan de estudio E de la carrera de Ingeniería Industrial*. La Habana, Cuba

Delgado Rubí, Juan Raúl. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de La Habana. La Habana, Cuba.

Macías Sánchez, J. (2014). *Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje*. Revista de Investigación Educativa. 4(9): 27- 57.

Stewart, J. (2009). *Cálculo con trascendentes tempranas*. Félix Varela. La Habana, Cuba.

SOBRE LOS AUTORES

Rogelio Paulino Acosta González, Licenciado en Matemática, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 1980. Profesor Auxiliar del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.

Maikel Hechavarría Aleaga, Licenciado en Contabilidad y Finanzas, Universidad de Las Tunas, 2004. Máster en Dirección, Universidad de Oriente, 2012. Profesor Asistente del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.

Luis Enrique Ramos Puga, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero, Holguín, 1990. Profesor Asistente del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.