9na
CONFERENCIA
CIENTÍFICA INTERNACIONAL
Universidad de Holguín

Medios didácticos complementarios para el aprendizaje de funciones reales que dependen de tres parámetros

Complementary didactical aids for the learning of real functions that depend on three parameters

Rogelio Paulino Acosta González[1], Rosbel Rolando Gómez Rojas[2], Osvaldo Almeida Conde[3].

[1]Universidad de Las Tunas, Cuba, racosta@ult.edu.cu, [2]Universidad de Las Tunas, rosbel@ult.edu.cu, [3]Universidad de Las Tunas, osvaldoac@ult.edu.cu.

RESUMEN

El trabajo toma como base un conjunto de seis actividades dinámicas con GeoGebra, elaboradas en la Universidad de las Tunas, para investigar el comportamiento de funciones reales de una variable real definidas por tres parámetros reales. La práctica demostró que este conjunto podía ser ampliado a otras clases funcionales y que esas actividades debían ser complementadas con otros medios didácticos. En consecuencia, se incluyen cuatro nuevas clases funcionales y aunque la propuesta sigue centrada alrededor de las correspondientes actividades con GeoGebra, cada una se complementa con otros archivos: una hoja de trabajo, un archivo en Power Point y un archivo en formato pdf. En cada actividad con GeoGebra se declara un objetivo general: Describir los cambios en el comportamiento de la función definida por la ecuación $y = f(x, a, b, c)$ cuando cambian los parámetros que la definen, donde en lugar de $f(x, a, b, c)$ se escribe cada vez la expresión analítica que define a la clase funcional que corresponda, en la que cada usuario puede modificar libremente, en los rangos definidos, cada uno de estos parámetros. En la hoja de trabajo se incluye información sobre la clase funcional respectiva, además de constituir una guía que sugiere valores de los parámetros a utilizar y tareas a ejecutar, preferentemente en ambientes colaborativos. El archivo en Power Point simula la actividad con GeoGebra, resultado de exportar las vistas gráficas que corresponden a cada conjunto de parámetros particulares sugeridos. El pdf simula a su vez este Power Point y es el más adecuado para visualizar en dispositivos móviles.

Palabras clave: GeoGebra; funciones; actividades didácticas; aprendizaje.

ABSTRACT

The work takes as a base a set of six dynamic GeoGebra activities, developed in the the University of Las Tunas, to investigate the behavior of real functions of a real variable defined by three real parameters. The practice showed that this set could be extended to other functional classes and that these activities should be complemented with other didactic means. In consequence, four new functional classes are included, and although the proposal remains centered around the corresponding GeoGebra activities, each one is complemented with other files: a worksheet, a Power Point file and a pdf file. In each GeoGebra activity a general objective is declared: To describe the changes in the behavior of the function defined by the equation $y = f(x, a, b, c)$ when the parameters that define it change, where instead of the $f(x, a, b, c)$ analytic expression that defines the corresponding functional class is written each time, in which each user can freely modify each of these parameters within the predefined ranges. The worksheet includes information on the respective functional class, as well as constituting a guide that suggests values of the parameters to be used and tasks to be executed, preferably in collaborative environments. The Power Point file simulates the GeoGebra activity, as a result of exporting the graphic views that correspond to each set of suggested parameters. The pdf simulates this Power Point and is the most suitable for use on mobile devices.

Keywords: GeoGebra; functions; dynamic activities; learning.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto función es clave en las matemáticas universitarias. De hecho, el Cálculo Diferencial e Integral, componente esencial de la formación matemática que se requiere en muchas de las carreras que se cursan en las universidades, puede ser considerado como un amplio y complejo aparato analítico, que permite investigar y establecer las principales propiedades de las funciones, para luego aplicarlas en los más variados contextos, o bien, lo que es bastante frecuente, modelar mediante funciones fenómenos que transcurren en la naturaleza o que resultan de la actividad práctica del hombre. Esta modelación supone que se construya, a partir de los datos que se obtienen del objeto de estudio, la función que mejor se corresponda con esos datos, lo que permite predecir la marcha ulterior y en ocasiones el comportamiento previo de ese fenómeno.

Un ejemplo que ilustra las ideas anteriores es el de la función definida por una ecuación tan simple como $y = ax^2$, donde a es una constante distinta de cero, a su vez caso particular de la conocida clase funcional $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, de las funciones cuadráticas, que se investiga primero desde el punto de vista puramente matemático con varias herramientas, comenzando con las básicas o elementales, disponibles desde la enseñanza preuniversitaria y que no precisan de conceptos que involucran procesos de paso al límite, hasta los recursos más sofisticados, como la derivada y la integral definida, que permiten revelar características y propiedades que de otro modo sería muy difícil establecer. Después, en base al significado que se atribuya a y (variable dependiente), a x (variable independiente) y al parámetro a, utilizarla para modelar fenómenos que tienen lugar en ámbitos tan diversos como el físico, el geométrico o el ingenieril, entre otros.

La conocida fórmula para determinar el área de un círculo de radio r, $A = \pi r^2$, es un evidente caso particular de la ecuación $y = ax^2$. Similarmente, si se considera que y representa la distancia S, que recorre un cuerpo que cae libremente (en ausencia de resistencia del aire) en el tiempo t, que está representado por la variable independiente x, y que el parámetro a es la mitad de la fuerza de la gravedad de la tierra g, entonces esta ecuación toma la forma $S = \frac{1}{2}gt^2$. Una expresión completamente similar es $E = \frac{1}{2}mv^2$, aunque es distinto el significado físico: da la magnitud de la energía cinética de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v (Acosta, 2004).

Un último ejemplo: el telescopio espacial Hubble es un artefacto complejo y costoso que ha permitido desvelar muchos secretos del universo durante las últimas décadas, pero para su funcionamiento, en última instancia, depende de su espejo parabólico, cuya forma es la de la superficie que se genera cuando una parábola rota alrededor de su eje de simetría (una parábola es la gráfica, en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, de una función que está definida por la ecuación $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$).

Se pueden señalar aplicaciones de otros tipos de funciones en los más diversos contextos (Stewart, 2009). No obstante, basta con los pocos ejemplos aducidos para dar una muestra del importante rol que ellas tienen en las matemáticas y en sus aplicaciones, razones para que aparezcan en otros niveles de enseñanza y que tengan un espacio clave en los currículos de muchas carreras universitarias.

Si las funciones que se consideran, o que debieran considerarse, en los niveles precedentes al universitario, así como la totalidad de la formación matemática que en esos niveles se debiera lograr, bastaran para satisfacer los requerimientos que imponen las disciplinas previstas en una carrera determinada, con absoluta certeza se podría asegurar que no habría necesidad de que aparecieran contenidos matemáticos en ella.

Pero esa no es la realidad; lo cierto es que se requieren matemáticas más poderosas, complementarias a las que se desarrollan en la enseñanza preuniversitaria; en tal sentido véase, por ejemplo, la disciplina Matemática General del Plan de Estudio E de la carrera de Ingeniería Industrial (Cuba. Ministerio de Educación Superior, 2018). Ese carácter complementario, y el potencial de esas nuevas herramientas matemáticas, se revelan en toda su magnitud en la misma medida en que se posea toda la información y el conocimiento que a nivel elemental es posible obtener de una función específica; lo que significa que las características que es posible obtener de una función con los recursos de la matemática del preuniversitario, son claves para comprender la necesidad de nuevos medios de análisis e investigación, que permitan revelar otras propiedades y, en definitiva, entender cómo se definen, operan y se aplican.

También es un hecho que la formación matemática que poseen muchos estudiantes cuando ingresan a la universidad no es suficiente para enfrentar los requerimientos que impone la matemática en este nivel, situación que no parece mejorar con el paso del tiempo. La propia existencia de la prueba de ingreso de Matemática en Cuba, la preparación que para enfrentarla lleva a cabo la generalidad de los estudiantes de preuniversitario, el interés de las familias y el papel de las instituciones educativas y de la sociedad en su conjunto, deberían ser factores que hicieran una contribución al éxito del estudiante de nuevo ingreso a la universidad en las asignaturas de la disciplina Matemática.

Pero eso no es así, y se da el caso de que el mismo estudiante que obtuvo una nota de 90 o más puntos en su prueba de ingreso, apenas unos meses después es incapaz de obtener la ecuación de una recta si son conocidos dos de sus puntos o de dibujar la parábola que es la gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas en el plano de una función cuadrática. Uno de los autores de este trabajo, en septiembre de 2018, durante su primer encuentro con 41 estudiantes de primer año de Ingeniería Industrial, escribió la ecuación $y = 9 - x^2$ y pidió que entre todos, consultándose libremente, respondieran varias preguntas sobre ella y que hicieran su representación geométrica. Luego de 20 minutos ninguno había graficado correctamente la parábola correspondiente.

Ante esta percepción que se hace del desempeño del estudiante que ingresa a una carrera universitaria que incluye una disciplina de formación matemática, se considera que únicamente caben tres posibilidades, a menos que se opte por la indiferencia. La primera es precisar si efectivamente esa es la realidad, si esa es la situación general o si, por el contrario, la generalidad es que los estudiantes arriban en una situación mejor que la descrita y en consecuencia es falsa la apreciación que se está haciendo. Lo deseable es que este fuera el caso; el problema sería entonces de varios individuos, incapaces de valorar justamente un fenómeno, pero ciertamente un problema, aunque minúsculo por su alcance y por la existencia de varias soluciones obvias.

En caso de que el panorama se corresponda con el descrito, en relación con la existencia de carencias significativas en la formación matemática de los estudiantes, se tienen las otras dos posibilidades. Una es tratar de precisar las causas principales de tal problema, para intervenir con la intención de modificarlas, de manera que ese problema no se manifieste o que se mantenga entre límites adecuados. Esta es una tarea compleja, si se atiende al carácter multifactorial del proceso de aprendizaje (o del no aprendizaje), y que no se corresponde con lo que se propone en este trabajo.

La otra posibilidad es tratar de hacer correcciones en ese estado de cosas, una vez ya está instalado y se ha reconocido que existe el problema del bajo nivel de preparación matemática de una parte considerable de los estudiantes que acceden a la universidad.

2. METODOLOGÍA

El trabajo es un conjunto de 40 medios didácticos, que amplia y complementa una propuesta anterior (Acosta, O´Farril, Rodríguez & Mena, 2017). Para su elaboración se mantiene la filosofía de trabajo, centrada en 10 actividades dinámicas con GeoGebra, y complementada con una hoja de trabajo para cada actividad y presentaciones en Power Point que las simulan, así como diez folletos en formato pdf. Se trabajan diez clases funcionales que dependen de tres parámetros reales. Proporciona a estudiantes y sus profesores muchas posibilidades para su empleo en distintos ambientes de aprendizaje.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La propuesta que se hace en este trabajo, y que se describe en lo que sigue, es coherente con lo planteado en la introducción. Con ella se pretende hacer una contribución que redunde en la mejora del desempeño matemático por parte de los estudiantes de nuevo ingreso a la universidad, en lo relativo a la temática de las funciones reales de una variable real, que son imprescindibles para el desarrollo de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Se identificaron diez clases funcionales, definida cada una por funciones de la variable real x, que adicionalmente están determinadas por tres parámetros reales. Una de ellas es la de las funciones

cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a, b y c son números reales y $a \neq 0$, de la que ya se vieron varias aplicaciones cuando $b = c = 0$. La Tabla 1 contiene las expresiones analíticas que definen a esas diez clases funcionales.

Tabla 1. Clases funcionales (a, b y c son números reales, así como la variable independiente x)

$f(x) = a^{x-b} + c,\ a > 0, a \neq 1$	$f(x) = \log_a(x-b) + c,\ a > 0, a \neq 1$	$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$
$f(x) = \frac{a}{x-b} + c,\ a \neq 0$	$\boldsymbol{f(x) = a\lvert x-b\rvert + c,\ a \neq 0}$	$f(x) = a\sqrt{x-b} + c,\ a \neq 0$
$f(x) = a\cos(bx-c),\ a \neq 0$	$f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx-c),\ a \neq 0$	$f(x) = a\sqrt[3]{x-b} + c,\ a \neq 0$
$f(x) = a(x-b)^3 + c,\ a \neq 0$		

Fuente: Elaborada por los autores.

Para cada clase funcional se elaboró una actividad con GeoGebra, un software libre de Geometría Dinámica, que desde su aparición a inicios del siglo se ha consolidado y extendido su uso por todo el mundo (Rubio, Prieto & Ortiz, 2016). La actividad relativa a una clase funcional permite hacer una investigación exhaustiva de las funciones que la forman, pues consta de funcionalidades diseñadas para ello; su utilización sistemática, esencialmente en ambientes de trabajo en grupos colaborativos, podría hacer una contribución decisiva a su aprendizaje.

Aunque la característica esencial de cada actividad es que se pueden variar libremente a, b y c en los rangos que se especifican (todos entre –5 y 5, siempre que no se impongan otras restricciones, como son $a > 0$ y $a \neq 1$ en los casos del logaritmo y la exponencial), lo que permite observar de inmediato los cambios analíticos y geométricos que se producen en la función y en su gráfica, se describirán con suficiente detalle, tomando como base para ello a la función modular $f(x) = a|x-b| + c$, $a \neq 0$. Junto con cada actividad se presenta una hoja de trabajo, en la que se sugieren conjuntos de valores de los parámetros a utilizar, así como tareas a ser cumplimentadas durante (o tras) la ejecución.

La utilización de las actividades requiere que GeoGebra esté instalado en una PC o dispositivo móvil. Como ese no será siempre el caso, se elaboraron medios alternativos, que al propio tiempo tienen carácter complementario (por poderse imprimir, por ejemplo). Uno es un archivo de Power Point, que utiliza imágenes exportadas desde la vista gráfica de GeoGebra, y que aprovecha sus posibilidades de animación para lograr un medio con cierto grado de interactividad, lo que permite simular los efectos que resultan de la ejecución de la actividad con GeoGebra. Esta presentación permite crear un archivo en formato pdf, el más adecuado para visualizar en un dispositivo móvil.

En resumen, se tienen diez clases funcionales y para cada una se presentan cuatro medios: una actividad con GeoGebra, una hoja de trabajo que orienta cómo usarla, una presentación de Power Point que simula a la primera y un folleto en formato pdf.

Descripción de una actividad con GeoGebra: caso modular.ggb

En este punto se describen las actividades creadas con el software GeoGebra. Se toma como base para ello la actividad correspondiente a la clase funcional $f(x) = a|x-b| + c$, $a \neq 0$, que se resaltó en la tabla 1. En la figura 1 se muestra la imagen de una vista gráfica que se ve al abrir este archivo (si fue guardado así), de nombre modular.ggb.

Además del título (sintético; cada actividad tiene por título la expresión analítica que define a la clase funcional que en ella se considera) y del objetivo, aparece un pequeño cuadro precediendo la frase Parámetros en el intervalo [–5, 5]. Este cuadro recibe el nombre de *casilla de control* y es un valor booleano que permite ocultar o mostrar objetos. En el caso que se muestra en la figura 1 está seleccionado (o activo), así que está mostrando las *casillas de entrada* de los parámetros a, b y c con los valores 1, 0 y 0, respectivamente. También está activa la casilla de control que precede al texto La función; es por ello que se visualizan la expresión analítica de la función, $f(x) = |x|$, y su gráfica a la derecha. También aparece el texto Función modular básica, porque corresponde al referente o patrón de esta clase funcional.

Fuente: Elaborada por los autores con GeoGebra.

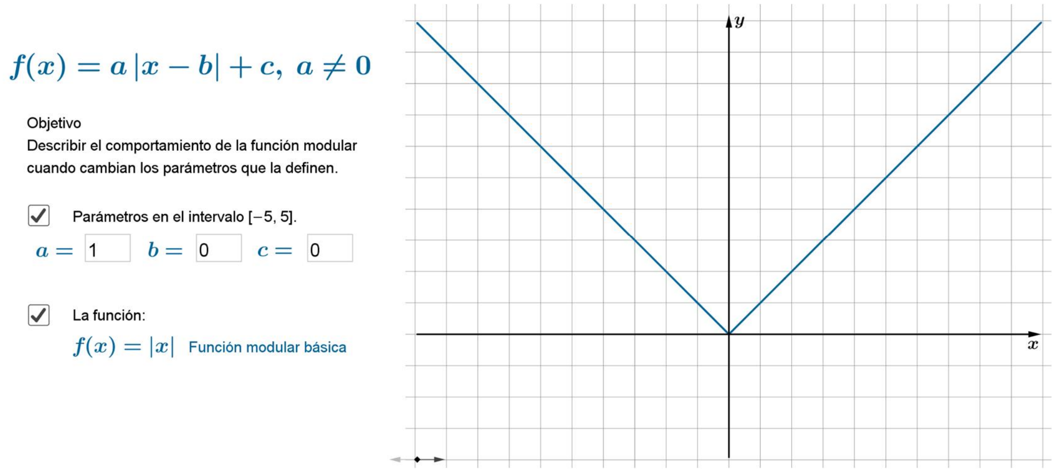

Figura 1. Imagen de una vista gráfica al ejecutar la actividad modular.ggb para $a = 1$, $b = c = 0$.

En las *casillas de entrada* se escriben directamente los valores que se deseen para cada parámetro, claramente entre –5 y 5. Si se escribe un valor fuera de ese rango, en la casilla correspondiente aparecerá un 5 o un –5, en dependencia de si se introduce un número mayor que 5 o uno menor que –5. De no respetarse la restricción $a \neq 0$, por haberse escrito $a = 0$, automáticamente se ocultan los objetos gráficos y analíticos que estuvieran visibles y se muestra el texto No es modular, es la función constante $f(x) = c$, siendo c el valor de este parámetro; se mantendrá así hasta tanto se modifique ese valor de a. Notar que este comentario demuestra que se utilizan, además de las casillas de entrada, opciones avanzadas que posee GeoGebra para ocultar o mostrar objetos. Al introducir un valor distinto para alguno de los parámetros, de inmediato ello se refleja en la expresión analítica de la función y en su gráfica (siempre que $a \neq 0$), lo que se apreciará de inmediato si se ha mantenido activa la otra casilla de control (ver figura 2).

Fuente: Elaborada por los autores con GeoGebra.

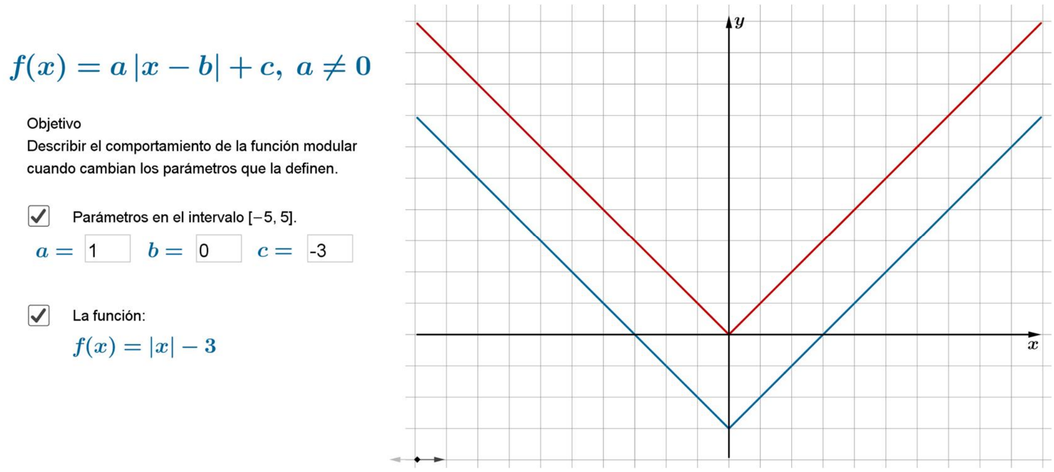

Figura 2. Imagen de una vista gráfica de la actividad modular.ggb para $a = 1$, $b = 0$ y $c = -3$.

Observar en esta figura que la gráfica del referente o patrón (una conclusión que se aspira saque quien esté ejecutando la actividad), $f(x) = |x|$, permanece visible, ahora en color rojo, de manera que se pueda apreciar por comparación el efecto que produce el nuevo valor de c, tanto en la expresión analítica como

en su gráfica, ambos en azul (debería concluirse que se produce un desplazamiento o traslación de la gráfica tres unidades hacia abajo, aunque no se señale la escala y que esos hechos se relacionen con el valor $c = -3$).

Fuente: Elaborada por los autores con GeoGebra.

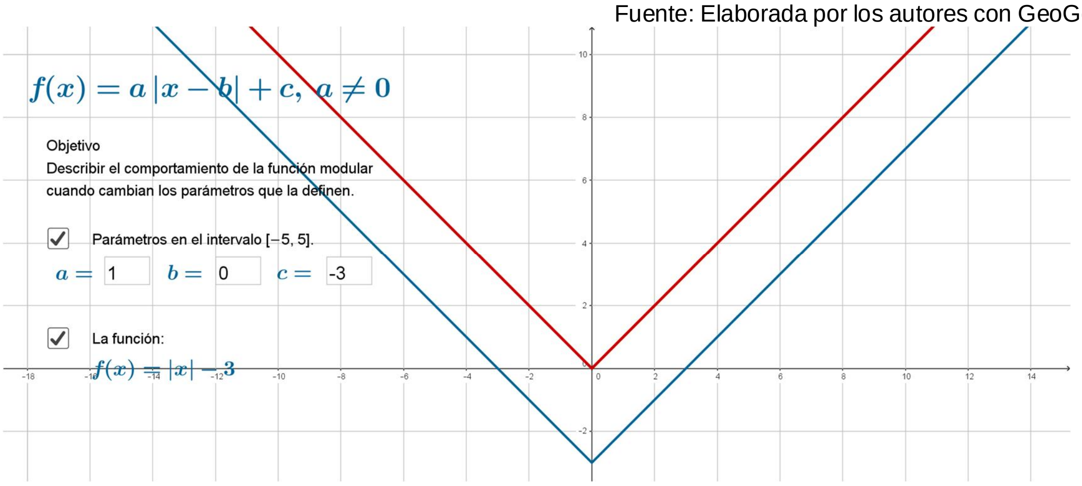

Figura 3. Imagen de una vista gráfica de modular.ggb con los ejes y cuadrícula de GeoGebra.

Es importante hacer algunas precisiones sobre otros tres elementos que se aprecian en las figuras 1 y 2. Son ellos el sistema de coordenadas, la malla o cuadrícula (siempre con escala unitaria) y la pequeña doble saeta, con un punto central con forma de rombo, que aparece en su esquina inferior izquierda. Para entender la necesidad de las precisiones que se harán, se comparan con la figura 3, en la que aparece la imagen de una vista gráfica con iguales valores de los parámetros y están visibles el sistema de ejes y la cuadrícula propios de GeoGebra.

Al comparar las imágenes de las vistas gráficas que se muestran en las figuras 2 y 3, se puede concluir que la organización de la información en la figura 2 es mucho mejor que en la 3, en la que se solapan los textos con el sistema de coordenadas, la cuadrícula y las gráficas del patrón $f(x) = |x|$ y de la función correspondiente a los mismos valores de los parámetros. Esto aclara por qué se ocultaron esos atributos propios de GeoGebra y se optó por crear una cuadrícula y un sistema de coordenadas que son estética y funcionalmente más apropiados. En lo que sigue se dan otras razones y se describe brevemente cómo se consiguió.

En las actividades que se presentan, al sistema de coordenadas propio de GeoGebra, que se oculta intencionalmente, se le superpone un sistema de ejes que se simula utilizando dos vectores de extremos variables, que siempre distan visualmente la misma distancia hasta los bordes derecho, izquierdo (el eje de las x), superior e inferior (el eje de las y) de la pantalla, aunque nominalmente esas distancias estarán dadas cada vez por cantidades que dependen del zoom que esté definido y del formato de la pantalla (4:3; 16:9; etc.) en que se esté visualizando la actividad.

Asimismo, creada utilizando el comando *secuencia* de GeoGebra, se muestra una malla o cuadrícula (sustituye la propia de GeoGebra, que se oculta), que abarca la parte de la vista gráfica determinada por los nuevos ejes simulados, siempre con escala unitaria, para facilitar por simple inspección la determinación de las coordenadas de ciertos puntos importantes, como son eventuales vértices e intersecciones con los ejes, así como los desplazamientos que se producen en la gráfica, ante cambios en los parámetros, entre otras características. De esta manera, la parte izquierda de la pantalla queda reservada para los textos, las casillas de control y de entrada y cualquier otra información que sea preciso colocar allí, mientras que la parte derecha se destina a los objetos gráficos. Esta funcionalidad no depende del zoom que se elija, del formato de la pantalla, ni de la posición del origen de coordenadas.

Finalmente, la doble saeta permite modificar el ancho de la zona que está determinada por los ejes y la

cuadrícula, para lo que bastará seleccionar y mover su punto central con forma de rombo. La saeta izquierda indica que se puede ampliar moviéndola en ese sentido. La derecha señala que se puede disminuir esa zona gráfica moviendo ese punto hacia la derecha. Para esta doble saeta se utilizó la opción de colores dinámicos; una de ellas dejará de ser visible, porque su color dinámico se tornó blanco (del fondo) mientras en la otra se tornó negro, cuando se llegó al límite previsto y ya no es posible modificar el ancho en el sentido que señalaba.

Los problemas de solapamiento entre objetos que surgían al ejecutar las actividades en dispositivos con monitores con formatos distintos al 16:9, hicieron evidente la necesidad de una opción que permitiera ampliar o reducir el ancho de la región de la pantalla reservada para presentar la información gráfica. Es claro que para poder hacerlo, las coordenadas del punto variable central de la saeta doble, siempre visible, tenían que determinar las del extremo izquierdo del eje x, así como la abscisa común de los puntos iniciales de la cuadrícula, por lo que fue una tarea no tan simple como se ha descrito.

Tanto en aspecto como en su filosofía de funcionamiento, el resto de las actividades poseen características similares a las de modular.ggb. Las modificaciones, donde las hubiera, son mínimas. Cada actividad es una especie de modelo o patrón, que permite crear la de otra clase funcional con relativa facilidad. Lo complejo fue poner una a punto, con toda la funcionabilidad que se deseaba que tuvieran todas.

Por ejemplo, si se escribe $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde está $f(x) = a|x - b| + c$, y luego, en el objetivo, *cuadrática* en lugar de *modular*, con ello ya se tendrían el título y el objetivo de la actividad para estudiar las funciones cuadráticas, para la que se mantienen inalterables las dos casillas de control y las tres de entrada, incluso en los mismos rangos para los parámetros. Para esa nueva actividad se requiere una modificación de más alcance, pero no compleja, si no se atiende la restricción $a \neq 0$; es decir, si se coloca 0 como valor de a, ello produce dos mensajes, aunque solamente estará visible uno, lo que depende del valor de b. Si también $b = 0$, aparece el mensaje No es cuadrática, es la función constante $f(x) = c$, siendo c el valor que esté asignado a este parámetro. En cambio, si $b \neq 0$, entonces el mensaje es No es cuadrática, es la función lineal $f(x) = bx + c$, donde b y c son los valores que se hayan dado a estos parámetros. Esta funcionabilidad se consiguió utilizando opciones avanzadas de GeoGebra para ocultar o mostrar objetos. En definitiva, existen aspectos distintos al comparar una actividad con otra, pues ellas sirven para estudiar, a fin de cuentas, clases funcionales distintas. No obstante, se insiste en que en todas son comunes los aspectos visuales y otras características, así como la filosofía de trabajo, lo que simplificó notablemente la puesta a punto de cada una de ellas.

Descripción de una hoja de trabajo: caso htmodular.pdf

Cada actividad para una clase funcional tiene asociada una hoja de trabajo, un archivo de texto en formato pdf, que contiene información básica sobre el referente o patrón de esa clase, sugerencias de conjuntos de valores a utilizar para los parámetros, así como tareas a ser realizadas por parte de algún eventual ejecutor de la actividad, en forma del llenado de registros tabulares que puedan sintetizar las observaciones y conclusiones obtenidas y que buscan conseguir que se focalice la atención en aspectos claves.

Seguidamente se relacionan las cinco tareas impuestas en el caso de la hoja de trabajo htmodular.pdf, asociada a la actividad modular.ggb (se respeta el diseño de esa hoja).

Tarea 1. Estudio de $f(x) = |x| + c$

Completa la tabla siguiente, manteniendo los valores $a = 1, b = 0$, y asignando al parámetro c los valores pertenecientes al intervalo $[-5, 5]$ que consideres convenientes. Se sugiere comenzar con los elementos que forman el conjunto $\{1, 2, 3, -1, -2, -3\}$.

Parámetros			Características de la función que resulta de los valores asignados a los parámetros							
a	b	c	$f(x) = \|x\| + c$	Vértice	Ceros	Decrece	Crece	Iy	Imagen	Simetría
1	0	0	$f(x) = \|x\|$	(0, 0)	$x = 0$	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$	(0, 0)	$[0, +\infty)$	Par
1	0	1	$f(x) = \|x\| + 1$	(0, 1)	No tiene	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$	(0, 1)	$[1, +\infty)$	Par
1	0	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Describe los cambios analíticos que se producen en $f(x) = |x| + c$, y en su gráfica, como resultado de los cambios en c. Compara la gráfica que se obtiene en cada caso con la de la modular básica. Es importante precisar qué características de la función que se obtiene cada vez se modifican y cuáles no lo hacen. Esencialmente, el objetivo que se persigue con la ejecución de esta tarea es el de precisar la influencia de c sobre las propiedades y el comportamiento de esta función.

Tarea 2. Estudio de $f(x) = |x - b|$

Tarea 3. Estudio de $f(x) = a|x|, |a| > 1$

Tarea 4. Estudio de $f(x) = a|x|, |a| < 1, a \neq 0$

Tarea 5. Estudio de $f(x) = a|x - b| + c, a \neq 0$

Observar que se describió completamente la tarea 1, para mostrar el contenido de las cuatro tareas restantes, porque en cada uno se siguen los mismos criterios. Adicionalmente, la estructura de cada hoja de trabajo es la misma para cada una de las clases funcionales y, en lo posible, se sugirieron los mismos valores para los parámetros.

Descripción de la presentación de Power Point: caso modular.pps

El uso del paquete Office está lo suficientemente extendido como para suponer está instalado en la mayoría de las computadoras personales, algo que no sucede con GeoGebra, y que versiones de él están disponibles en muchos dispositivos móviles, por eso se consideró conveniente elaborar, para cada una de las actividades, una presentación de Power Point que la simulara. Para hacerlo, se aprovecharon imágenes exportadas desde la vista gráfica durante momentos adecuados de la ejecución de esas actividades, en las que se usaron los conjuntos de valores de los parámetros sugeridos en la hoja de trabajo.

Se discuten seguidamente algunas características importantes de esas presentaciones, en las que se usaron hipervínculos y desencadenadores para lograr cierta interactividad, lo que simula la ejecución de la actividad con GeoGebra. Se toma como base la que se elaboró a partir de modular.ggb, que tiene el nombre de modular.pps. En la figura 4 se muestran dos imágenes de diapositivas de esta presentación.

Fuente: Elaborada por los autores con Power Point.

Figura 4. Imagen de la diapositiva de apertura de modular.pps y del menú disponible.

A la izquierda la imagen de la diapositiva de portada. A la derecha la imagen de la diapositiva con el menú que facilita la navegación en la presentación, que se corresponde con las cinco tareas propuestas en la hoja de trabajo htmodular.pdf. Mediante iconos adecuados se anticipan los movimientos en el plano que tienen lugar al elegir alguna de las cinco opciones. Una vez seleccionada una de ellas con un clic (lo que se selecciona realmente es una de las expresiones analíticas), ello produce un salto a una diapositiva que a su vez contiene opciones de los valores del parámetro (o de los parámetros si es la última). A la izquierda en la figura 5 está la imagen de la diapositiva a la que se accede luego de un clic en $f(x) = |x| + c$ (la opción que está arriba, en la menú incluido en la figura 2). Se observa un menú con siete valores de c (los siete valores disponibles forman una barra horizontal, arriba a la derecha, debajo de la expresión de la función) y luego clic en el valor -3 para c, lo que hace visible la imagen de la vista gráfica de GeoGebra para esos valores ($a = 1$, $b = 0$ y $c = -3$).

Fuente: Elaborada por los autores con Power Point.

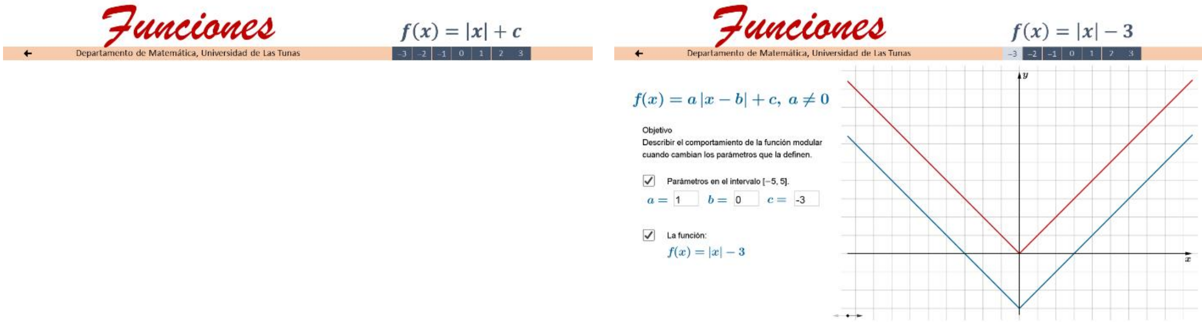

Figura 5. Izquierda: acceso desde el menú de modular.pps y a la derecha luego de clic en –3.

Observando la imagen a la derecha en esta figura, se precisa que ocurren otros dos eventos al mismo tiempo: se modifica el diseño del pequeño cuadro que contiene el valor $c = -3$ y la expresión general de la función $f(x) = |x| + c$ se sustituye por $f(x) = |x| - 3$, en correspondencia con ese valor del parámetro.

Descripción del archivo en formato pdf: caso modular.pdf

Este es un punto muy breve. Haciendo algunas ligeras modificaciones en algunas de las diapositivas de modular pps, se crea una versión que se guarda en formato pdf, de lo que resulta un folleto, sin opciones de interactividad, pero con la ventaja de poder visualizarse perfectamente en los dispositivos móviles, un hecho de la mayor importancia si se atiende al contexto actual; adicionalmente, puede ser impreso.

Algunas ideas para la utilización de los medios que constituyen la propuesta

Se pueden utilizar en actividades de repaso o consolidación, a desarrollar de forma independiente por estudiantes matriculados en los primeros años en distintas modalidades universitarias (curso diurno, curso por encuentros y enseñanza a distancia. Discrecionalmente, el trabajo podría indicarse a alumnos en los que se hayan constatado limitaciones o carencias en relación con sus conocimientos sobre las funciones de las incluidas en la propuesta.

También se pueden utilizar en actividades de aprendizaje con estudiantes que pretenden matricular o que iniciarán carreras universitarias que incluyen una disciplina de formación matemática. En particular, esto es esencial para los que accedan a los cursos por encuentro, aunque en este último caso habría que crear mecanismos de acceso a ellos.

4. CONCLUSIONES

Las actividades propuestas forman un amplio conjunto de 40 medios didácticos, que se complementan entre sí, que permite hacer un estudio detallado de diez importantes clases funcionales, las que tienen amplia utilización en los niveles precedentes al superior y son requisitos previos en carreras universitarias que requieren estos contenidos matemáticos. Se considera que:

1. El uso de estos medios, en los más diversos contextos y circunstancias de aprendizaje y para múltiples propósitos, debería poder hacer una contribución al aprendizaje de las funciones consideradas, así como de otras cuestiones matemáticas que no son privativas de clase funcional alguna y que se utilizan en ellos.
2. Será la utilización práctica la que pondrá en claro finalmente la mejor forma de usar los medios que forman la propuesta y, en definitiva, el verdadero alcance y valor didáctico de ellos, que de ningún modo hará de la adquisición de conocimientos matemáticos un asunto sencillo.
3. La propuesta que se hace debería verse exclusivamente como lo que es: un conjunto de medios disponible para continuar lidiando con toda la complejidad inherente al aprendizaje matemático, en particular el aprendizaje de las funciones, claves para el trabajo con los conceptos matemáticos que se consideran en el Cálculo Diferencial e Integral.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, R. (2004). *Funciones reales de una variable real*. Editorial Universitaria. La Habana.

Acosta, R., O´Farrill, Y. J., Ponce, M. C. & Mena, F. (2017). *GeoGebra*: *actividades para el trabajo con seis clases funcionales*. En memorias del evento COMPUMAT 2017. Universidad Tecnológica de La Habana (cujae). La Habana, Cuba.

Cuba. Ministerio de Educación Superior. (2018). *Plan de estudio E de la carrera de Ingeniería Industrial*. La Habana, Cuba.

Rubio, L., Prieto, J. L. & Ortiz, J. (2016). *La Matemática en la simulación con GeoGebra*. International Journal of Educational Researchs and Innovation. (IJERI).

Stewart, J. (2009). *Cálculo con trascendentes tempranas*. Félix Varela, La Habana.

SOBRE LOS AUTORES

Rogelio Paulino Acosta González, Licenciado en Matemática, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 1980. Profesor Auxiliar del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas. Instructor.

Rosbel Rolando Gómez Rojas, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Instituto Superior Pedagógico Pepito Tey, Las Tunas, 1990. Máster en Ciencias de la Educación, Instituto Superior Pedagógico Pepito Tey, 2010. Instructor del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.

Osvaldo Almeida Conde, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Instituto Superior Pedagógico José Martí, Camagüey, 1989. Máster en Ciencias de la Educación, Instituto Superior Pedagógico Pepito Tey, 2008. Profesor Auxiliar del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas. Jefe de este Departamento.