9na
CONFERENCIA
CIENTÍFICA INTERNACIONAL
Universidad de Holguín

Tres abordajes a los problemas de optimización en una variable: formalizado, interactivo y dinámico

Three approaches to the problems of optimization in one variable: formalized, interactive and dynamic

Rogelio Paulino Acosta González[1], Osvaldo Almeida Conde[2], José Acosta Velázquez[3].

[1]Universidad de Las Tunas, Cuba, racosta@ult.edu.cu, [2]Universidad de Las Tunas, osvaldoac@ult.edu.cu, [3]Universidad de Las Tunas, joseav@ult.edu.cu.

RESUMEN

Se presenta una colección de diez problemas de optimización, cuidadosamente escogidos, que se pueden modelar y resolver con las técnicas usuales de optimización en una variable. Cada uno de ellos se resuelve de tres formas distintas, que se complementan entre sí. En primer lugar, a cada problema se le da una solución formal, similar a la que se pudiera encontrar en un texto, para lo que se asume una metodología de resolución, de las muchas (equivalentes) que aparecen en la bibliografía sobre esta temática. En segundo lugar, el mismo problema se considera en una actividad dinámica con GeoGebra y se le da una solución numérico - geométrica, para la que no siempre se precisa disponer de una función que modele ese problema, aunque pudiera requerir de algunos otros de los elementos propios de una solución formal. Esta mirada dinámica no se puede aplicar a problemas paramétricos, lo que explica la no presencia de ellos entre los considerados. En tercer lugar, aprovechando las posibilidades de animación propias del Power Point, se logra una mirada interactiva, en la que el problema se resuelve paulatinamente, paso a paso, con un sistema de ayudas, básicamente mediante preguntas a las que el usuario debe dar respuestas que luego se proporcionan en el propio archivo. Esta mirada múltiple apunta al objetivo de lograr un enfoque integral en el tratamiento de estos importantes problemas, que pudiera hacer una contribución al desarrollo por parte de los estudiantes de las capacidades para resolverlos.

Palabras clave: GeoGebra; problemas de optimización; solución; enfoque integral.

ABSTRACT

This work presents a collection of ten optimization problems, carefully chosen, which can be modeled and solved with the usual techniques of optimization in one variable. Each of them is resolved in three different ways, which complement each other. In the first place, each problem is given a formal solution, similar to that which could be found in a text, for which a resolution methodology is assumed, one of the many (equivalent) that appear in the bibliography on this subject. Secondly, the same problem is considered in a dynamic activity with GeoGebra and is given a numerical-geometric solution, for which it is not always necessary to have a function that models that problem, although it could require some other of the elements of a formal solution. This dynamic approach can not be applied to parametric problems, which explains the absence of them among those considered. Third, taking advantage of the animation possibilities of the Power Point, an interactive approach is achieved, in which the problem is solved gradually, step by step, with a system of aids, basically through questions to which the user must give answers which are then provided in the file itself. This multiple points of view aim at the objective of achieving an integral approach in the treatment of these important problems, which could make a contribution to the development by the students of the capacities for their resolution.

Keywords: GeoGebra; problems of optimization; solution; integral approach.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, y desde hace muchísimo tiempo, a Newton (1642 – 1727) y a Leibniz (1646 – 1716) se les considera los fundadores del Cálculo Infinitesimal, lo que los sitúa entre los más brillantes matemáticos de la Historia (Ribnikov, 1987). En lo que no parece haber acuerdo es en una cuestión más bien filosófica, relativa a si ellos lo *crearon* o *inventaron* o si, simplemente, lo *descubrieron* (Matijasevic, 2010).

Al margen de cuál de esas dos posiciones se asuma, lo que también se acepta por todos es que ambos, y sus continuadores, proporcionaron a la Ciencia herramientas de análisis, interpretación y cálculo muy eficientes que, aplicadas en las más diversas áreas del conocimiento y de actividad, han permitido avances espectaculares y desvelar muchos secretos que sin ellas habría sido muy difícil conseguir. Siglos de utilización intensa y sistemática no las han agotado y es presumible que no las agotarán en el futuro.

Una de las herramientas más poderosas de ese Cálculo es la *derivada*, instrumento por excelencia para el estudio del cambio y del movimiento. Entre las áreas en las que este concepto se aplica con particular éxito está la resolución de los llamados *problemas de optimización*. No es casual entonces que el título de uno de los trabajos esenciales de Leibniz sea: *A new method for finding máxima and minima, and likewise for tangents, and with a single kind of calculation for these, which is hindered neither by fractions nor irrational quantities* (Leibniz, 1684), con lo que hace una mención explícita a la utilización de su *nuevo método* para la determinación de máximos y mínimos, que es lo que en definitiva se procura en esos problemas.

Hace veinte años Raúl Delgado fundamentó que en los cursos de Cálculo Diferencial en una variable— componente clave de las disciplinas de Matemática Superior que forman parte de los currículos de muchas carreras universitarias— todos los problemas que se consideran se pueden clasificar en cuatro categorías básicas: *aproximar*, *optimizar*, *graficar* y *comparar* (Delgado, 1999). Se puede estar de acuerdo o se puede discrepar, pero lo cierto es que forman un cuarteto muy importante. Entre ellos, a la tarea de *optimizar* se le ha dedicado siempre mucha atención; en particular, es responsable de que en los currículos aparezcan adicionalmente otros contenidos relacionados, que es imprescindible desarrollar con antelación y que luego se tienen que recuperar para utilizarlos en la resolución de esos problemas, como son los que se modelan con funciones reales de una variable real, lo que les confiere mayor relevancia por requerir e integrar muchos conceptos y procedimientos. De hecho, casi la totalidad de los contenidos que se desarrollan en un curso de Cálculo Diferencial intervienen o pueden intervenir para modelarlos y resolverlos.

Eso explica, por ejemplo, que en el Plan de Estudio E de la carrera de Ingeniería Industrial se incluya de forma explícita, entre los conocimientos esenciales a adquirir y entre las habilidades principales a dominar, la aplicación de la derivada a la resolución de problemas de optimización, aunque también se plantea la necesidad de incorporar asistentes matemáticos como herramientas para los cálculos, representaciones y análisis de problemas matemáticos, así como para interpretar conceptos, obtener y comparar resultados, sacar conclusiones y resolver problemas. De igual forma, se contempla la aplicación de métodos numéricos de resolución (Cuba. Ministerio de Educación Superior, 2018).

Los documentos rectores de otras muchas carreras de Ciencias Técnicas pudieran citarse para mostrar que el tratamiento que se da a todos estos contenidos es similar, en cuanto a la relevancia que se concede a esos problemas, a su resolución analítica "exacta", utilizando las herramientas del Cálculo Diferencial, o "aproximada" con métodos numéricos, y al papel que en ese proceso deben desempeñar los asistentes matemáticos. Los entrecomillados tratan de ilustrar el carácter relativo de esas palabras; por ejemplo, un problema hipotético que tuviera la solución *exacta* cuando algún parámetro o variable tome el valor $\sqrt{3}$, en definitiva es *aproximado* si se atiende a que se deberá utilizar alguna aproximación de este número irracional, a los efectos de darle alguna aplicación o significado práctico.

En el presente trabajo se toma en cuenta la importancia intrínseca de los problemas de optimización que se modelan con funciones reales de una variable real, tanto por la significación que tienen al interior de la Matemática como en sus múltiples aplicaciones fuera de ella. También se atiende al papel "movilizador e integrador" de contenidos y de recursos que se revela a la hora de resolver uno de tales problemas, entre los que se incluyen las aplicaciones informáticas que intervienen o pueden intervenir en ese proceso.

El objetivo que se plantea es mostrar que es posible y conveniente conseguir una mirada múltiple para la resolución de uno de estos problemas, en el sentido de abordarlos con distintos enfoques, complementarios

entre sí, con la clara intención de proporcionar un tratamiento integral que pueda hacer una contribución al desarrollo de la capacidad para resolverlos, fomentando así su aprendizaje.

En primer lugar, se aborda un problema de optimización siguiendo un *enfoque formalizado*, tradicional, como el que se puede encontrar en la amplia bibliografía disponible sobre esta temática. Llevarlo a cabo presupone asumir una metodología adecuada de resolución, como es la incluida en el libro *Cálculo con Trascendentes Tempranas* (Stewart, 2009), texto básico en Cuba para las carreras de Ciencias Técnicas, que fue por la que se optó.

Una limitante que se pudiera señalar es que la solución del problema aparece entonces de una vez, como algo acabado, lo que crea la dificultad de que no siempre se consigue involucrar al estudiante en el proceso, toda vez que puede percibir que todo está hecho, que a él solo le corresponde ver lo que otro hizo y tratar de aprender por imitación o analogía. A su favor dar un argumento esencial: se procede como en los libros, que siempre se han utilizado con éxito, con mucho éxito, para estudiar y aprender.

En segundo lugar, un problema del que ya se dispone o puede disponerse de su solución formal, que se obtuvo o puede obtenerse siguiendo el enfoque ya expuesto, se considera en un *ambiente interactivo*, como el que debería caracterizar a un aula o a un equipo de estudio, en el que la persona que conduce la actividad usualmente fomenta la participación de los demás mediante preguntas y otros requerimientos, previos a la formalización de cada resultado, de manera que la solución se consiga paso a paso, para que se vaya construyendo en un ejercicio en el que todo tiene que hacerse desde el principio.

La cuestión entonces es la siguiente: ¿Qué posibilidades debe poseer un medio didáctico para permitir esas interacciones, no ya entre varios individuos (que es lo deseable porque no se descarta la cooperación), sino básicamente entre la persona que tiene que aprender y el contenido objeto de aprendizaje?

Afortunadamente, muchos medios didácticos con tecnología informática pueden hacerlo posible. De hecho, aunque los profesores se quejan a diario de que sus alumnos no estudian lo que debieran, la realidad es que son muchos los aprendizajes que llevan a cabo de forma autónoma o con poca ayuda, aunque sobre contenidos que pudieran considerarse poco académicos, pero que son importantes, les resultan atractivos y por eso motivantes. El asunto deriva entonces en hacer igual de motivante lo que se quiere que aprendan. Precisamente, aquí se propone un medio en el que utilizando las múltiples opciones de animación de Power Point, se consigue un grado de interactividad que pudiera ser suficientemente atractivo a los estudiantes, para de ese modo favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas de optimización. No simplifica esa tarea, tampoco la hace menos compleja, pero tiene muchas prestaciones, en un ambiente de trabajo que se considera agradable y quizá por todo eso, los estudiantes se animen a usarlo.

En tercer lugar, se tiene un *enfoque dinámico* mediante una actividad elaborada con el software GeoGebra, en la que se resuelve de forma geométrica - numérica un problema (preferiblemente el mismo problema) aprovechando las posibilidades de representación gráfica y de movimiento, que se expresan en los cambios que pueden conseguirse y visualizarse en la posición, la forma, la cantidad y el color, todo lo cual permite reforzar ideas esenciales. De esta forma, este enfoque es complementario, porque incorpora opciones de visualización y movimiento (dinámicas) que es muy difícil lograr en los dos anteriores.

En resumen, se llevan a cabo tres abordajes para resolver un mismo problema de optimización: *formal*, como el que se sigue usualmente en un libro de texto, *interactivo* con ayuda de un archivo con prestaciones para ello, en formato pps, y *dinámico*, mediante una actividad con GeoGebra. Este enfoque integral pudiera hacer una contribución al desarrollo de las habilidades que permitan a los estudiantes trabajar con éxito en la resolución de estos importantes problemas.

2. METODOLOGÍA

El trabajo es una colección de medios didácticos, en los que se trabajan diez problemas de optimización cuidadosamente seleccionados. Cada problema se analiza y resuelve de tres formas que se complementan entre sí. La primera *formalizada*, para la que se asume una metodología de resolución, como las que están disponibles en la bibliografía relativa a esta temática. Se materializa en un folleto. La segunda es *dinámica*, ejecutando una actividad elaborada con el software GeoGebra para cada problema, en la que las opciones de visualización y movimiento, y donde la forma, la cantidad y el color variables, tributan a concentrar la

atención en aspectos relevantes durante el proceso de resolución numérica - geométrica del problema. La tercera es *interactiva*, mediante un archivo en formato pps en el que se logran posibilidades de interacción que permiten resolverlo paso a paso, donde la participación del que aprende se favorece mediante un sistema de preguntas y requerimientos previos al establecimiento de cada resultado. Contiene todos los problemas resueltos y posee opciones de acceso a los medios anteriores. Ofrece a estudiantes y sus profesores muchas posibilidades para su empleo en distintos ambientes de aprendizaje.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La primera tarea desarrollada fue seleccionar los problemas que luego serían resueltos de las tres formas descritas. Varios fueron los criterios empleados; aunque son tres los principales. Entre ellos que fueran *geométricamente representables*, lo que debe entenderse en el sentido de que fuera posible construir una gráfica como figura de análisis, y que luego pudiera transformarse, modificando alguno de sus elementos, lo que a su vez debería tener una expresión en los cambios numéricos que se produjeran en las cantidades involucradas, en particular, en aquella cuyo óptimo se está buscando.

Otro criterio utilizado fue atender a la *relevancia práctica*. Cada problema debería poderse relacionar con un contexto práctico posible, ya sea por su propia naturaleza o por alguna interpretación práctica creíble, legítima, que de él se pudiera hacer, de manera que se renuncia a interpretaciones ficticias. En calidad de ejemplo puede servir uno de los problemas elegidos, que se formula así:

PROBLEMA 4

Un triángulo tiene vértices en $A(0, 8)$ y $B(9, 4)$. Elegir el vértice C en el eje x de manera que sea mínima la longitud de la poligonal ACB.

Es claro que el problema, formulado de esa forma, no parece tener un valor que sobrepase su utilidad como un ejemplo más, que puede ser resuelto *formalmente*, de forma *interactiva* o bien ejecutando una actividad *dinámica* elaborada con GeoGebra para ese propósito. Incluso, las coordenadas de los puntos A y B se escogieron con la intención de que sea entero el valor que se busca para la abscisa del punto C en el que se alcanza el mínimo, de forma que no hubiera demasiadas complicaciones de cálculo. No obstante, su solución permite interpretarlo en términos de un fenómeno tan común y tan importante como es el de la reflexión de la luz, que cuando se produce en el mismo medio óptico lo hace siguiendo una trayectoria de longitud mínima, lo que determina la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión y recíprocamente. A todas estas ideas se apela una vez resuelto y es lo que le confiere una significación práctica genuina.

Los problemas *no pueden ser paramétricos*, dado que en GeoGebra cualquier representación gráfica que se haga, así como las cantidades que caracterizan a los objetos geométricos que en ella aparezcan siempre son específicas, concretas, nunca generales, de modo que ello obliga a formulaciones también específicas. Por eso es que en el problema anteriormente expuesto se tuvieron que especificar las coordenadas de los vértices A y B, porque en otro caso no habría posibilidad de darle una solución numérica en una actividad con este software.

Es la misma situación con un problema general, que aparece con frecuencia en la bibliografía, el de inscribir el rectángulo de área máxima en una elipse cualquiera, determinada por las longitudes de sus semiejes mayor a y menor b. Aquí se enunció para una elipse con los semiejes $a = 5$ y $b = 3$, para poder incluirlo en la propuesta.

Lo que resulta paradójico es que podrá observarse que la actividad con GeoGebra que se elaboró, para darle solución numérica - geométrica a ese problema, tiene la opción de decidir libremente las longitudes de los semiejes, dentro de cierto rango que debía establecerse dados los objetivos didácticos planteados. De esa forma, ello da la posibilidad de resolver una infinidad de problemas, lo que pudiera dar información concluyente sobre el caso general, paramétrico, que se está obviando.

Este medio está publicado en el sitio www.geogebra.org bajo un nombre relativamente largo: *rectángulo de área máxima inscrito en elipse.ggb*, y es el que se utiliza para describir el tratamiento que se lleva a cabo con cada uno de los problemas considerados en la propuesta.

Seguidamente se comienza la descripción del abordaje formalizado para resolver un (ese) problema.

Resolución formalizada de un problema de optimización

Como se planteó, se asume la metodología que aparece en el libro *Calculo con Trascendentes Tempranas* (Stewart, p. 329-330, 2009), que se transcribe a continuación.

"Pasos para la solución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. **Introduzca notación** Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos (a, b, c, …, x, y) para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos. Puede ayudar el uso de iniciales como símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. Enseguida, use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para Q. De esta suerte, Q se expresará como función de una variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Aplique los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para hallar el valor máximo o mínimo *absoluto* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1."

La propuesta se describirá a partir de un caso particular del problema general de determinar el rectángulo de área máxima inscrito en una elipse, que se formuló en los siguientes términos:

PROBLEMA 5

Inscribir el rectángulo con la mayor área posible en una elipse cuyos semiejes a y b tienen longitudes $a = 5u$ y $b = 3u$.

Resolución

Una lectura cuidadosa permite concluir que es un problema de *máximo* (a partir de la frase *mayor área posible*), siendo el *área* de un rectángulo la cantidad a maximizar (paso 1).

El rectángulo está inscrito en una elipse cuyos semiejes tienen longitudes $a = 5u$ y $b = 3u$, así que lo mejor es hacer un dibujo que ilustre este hecho, como es el que aparece a la derecha, en la figura 1 (paso 2).

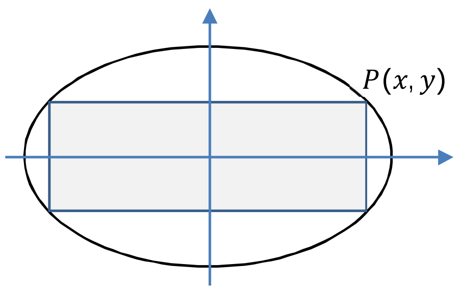

Figura 1. Rectángulo inscrito en elipse.

La introducción de un sistema de coordenadas con origen en el centro de la elipse y cuyos ejes contienen a los ejes mayor y menor de esta cónica, toma en cuenta los pasos 3, 4 y 5, lo que permite hacer corresponder a cada uno de los vértices del rectángulo con sus coordenadas.

Ya definida la abscisa y la ordenada de uno de los vértices con relación a ese sistema de referencia, se determinan de forma automática, por simetría axial o central, las coordenadas de los tres restantes. Por eso es que solo se colocaron las coordenadas del situado en el primer cuadrante: $P(x, y)$. Con estas consideraciones se cumplimenta el paso 3.

A partir de las coordenadas de P se obtiene con facilidad una expresión para el área del rectángulo inscrito en función de ellas (paso 4): $A(x, y) = 4xy$, atendiendo a que las longitudes de la base y de la altura son $2x$ y $2y$, respectivamente.

Una razón adicional para la introducción de ese sistema de coordenadas es que permite tener para la elipse

una ecuación muy simple: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, en la que puede despejarse con facilidad una de las variables.

Observar que se optó por colocar el eje mayor sobre el eje de las x. La otra posibilidad para obtener una ecuación igual de simple, hubiera sido situar el eje mayor contenido en el eje de las ordenadas.

Al despejar la variable y en la ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, se obtiene que $y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$, donde se toma la raíz positiva atendiendo a que el vértice P está sobre la parte de la elipse situada en el semiplano $y > 0$. Todo este trabajo permite obtener para el área del rectángulo inscrito la expresión $A(x) = \frac{12}{5}x\sqrt{25 - x^2}$, que la define como función de x en el intervalo abierto $(0, 5)$. Todo este trabajo da cumplimiento al paso 5.
Ya como parte de la aplicación de los métodos analíticos (paso 6) para la determinación del máximo de $A(x)$, se observa que $A(0) = A(5) = 0$, una doble igualdad numérica que es consecuencia de la sustitución formal de esos argumentos en la expresión del área en función de la abscisa x, pero a la que es posible dar una interpretación trivial en términos geométricos. En efecto, tanto para $x = 0$ como para $x = 5$ no hay rectángulo inscrito, dado que él degenera en un segmento contenido en el eje de las y o bien contenido en el eje de las x, respectivamente; el área de cualquiera de ellos es igual a cero.
Las observaciones anteriores permiten considerar la situación más simple de obtener el máximo de $A(x)$ en el intervalo $[0, 5]$, al que se le puede aplicar el método del intervalo cerrado, mencionado en el paso 6.
Como $A(0) = A(5) = 0$ y $A(x)$ es continua en $[0, 5]$ y positiva en su interior $(0, 5)$, se puede concluir que alcanza el máximo en algún número de este intervalo abierto (no puede tomar el máximo en los extremos por anularse en ellos). Adicionalmente, como es derivable en este intervalo, en virtud del teorema de Rolle, se concluye que ese número es un cero de la derivada $A'(x)$.
Atendiendo a los comentarios anteriores y a que la derivada $A'(x) = \frac{12}{5}\left[\sqrt{25 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}}\right]$ solo se anula en $(0, 5)$ para $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, se concluye que ese es el número donde $A(x)$ alcanza el máximo. Con este valor, que es la abscisa del vértice P en el rectángulo inscrito de área máxima, se precisa su ordenada: $P\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, así como el valor máximo del área, igual a $30u^2$. Notar que esta cantidad es la mitad del área del rectángulo en el que se inscribe la elipse, de base $10u$ y altura $6u$. Con esto finaliza la solución formal.

Resolución interactiva de un problema de optimización: archivo optimiza.pps

En la figura 2 se incluyen partes de imágenes de una de las diapositivas de la presentación optimiza.pps, que es el archivo en el que se resuelven de forma interactiva los diez problemas incluidos en la propuesta; ellas corresponden al proceso de resolución paso a paso del problema que se está considerando. Deben verse en sentido horario y pretenden ilustrar las posibilidades y prestaciones de ese medio.

Figura 2. Composición de algunas imágenes de una diapositiva de optimiza.pps.

Si en la imagen situada a la izquierda, arriba, en la figura 2, se ignora el subrayado a la palabra elipse y el texto *Se dibuja la elipse*, se estaría frente a la diapositiva donde se formula el problema, como aparece al acceder a ella. Luego de un clic se visualiza esa imagen (hacer clic para iniciar el proceso de resolución lo

indica la ayuda, para la que se puede observar un botón disponible). Ese texto y distinguir a la elipse dentro del enunciado del problema constituyen impulsos o ayudas, porque se está focalizando la atención sobre esta curva, que es clave en la comprensión del problema, y se está sugiriendo que debería dibujarse. Lo que se pretende es que el ejecutor, antes de hacer alguna otra cosa, tome un lápiz y un papel y dibuje la elipse. Luego de un clic ella aparece, en la imagen arriba a su derecha, como indicador para la regulación y el control.

Además de la elipse, visible en la imagen arriba a la derecha, se tienen nuevas ayudas. El clic mencionado condicionó el subrayado a la palabra rectángulo y la aparición del texto *y se le inscribe un rectángulo*. Se está entonces frente a la misma situación ya explicada, de manera que las pretensiones son las mismas: que se acuda de nuevo a la formulación del problema para comprenderlo y que se inscriba el rectángulo, para ir completando el diagrama o figura de análisis.

De nuevo, un clic permitirá mostrar un rectángulo inscrito en la elipse. Es lo que se observa en la tercera imagen, abajo a la derecha. Notar que los colores se corresponden con los utilizados en los subrayados. También se ha señalado uno de los vértices del rectángulo con la letra P y está visible un nuevo impulso, dado mediante el texto *Para hallar el punto P, que garantiza obtener el área máxima, se introduce un sistema de coordenadas con origen en el centro de la elipse*. Aquí lo que se pretende es que se trace ese sistema antes de hacer alguna otra cosa.

Finalmente, abajo a la izquierda, la última imagen en esa figura. Se han situado las coordenadas de P y se ha señalado un rectángulo auxiliar y se ha expresado su área en función de ellas. Ello tiene la intención de facilitar entender que el área del rectángulo inscrito es $A(x, y) = 4xy$, pero ya esa es una cuestión que no se aprecia en la figura 2.

Se ha mostrado que bajo el título **Aspectos y preguntas claves** se proporcionan impulsos o ayudas, para lo que se utilizan indicaciones y preguntas que se pretende lleve a cabo o conteste el ejecutor del medio. A la izquierda se va llevando propiamente el proceso de solución, colocando los aspectos que ya se han logrado establecer formalmente. El proceso de resolución concluye como se muestra en la figura 3.

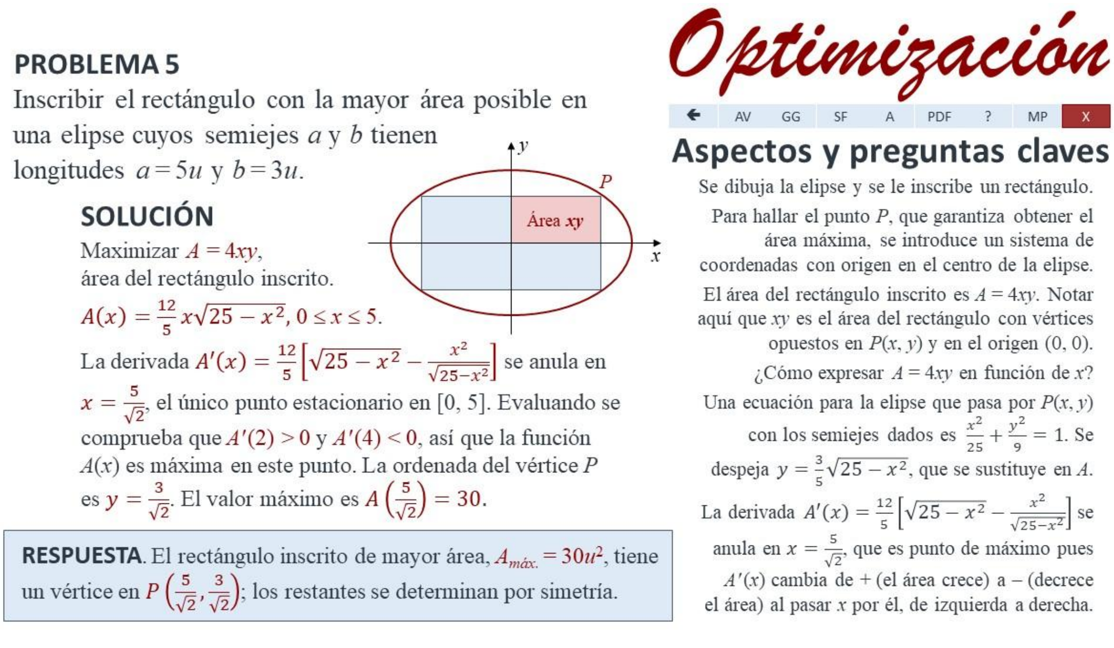

Figura 3. Imagen de la diapositiva de optimiza.pps con la conclusión del proceso de resolución.

Antes de concluir con la reseña de la solución interactiva señalar que desde la presentación optimiza.pps se puede acceder a varias opciones, tales como: la solución formalizada (con clic en el botón que contiene

el texto SF), a datos de los autores (A), a una versión de las soluciones que se dan en optimiza.pps (como la que aparece en la figura 3) en formato pdf (PDF), a valoraciones y análisis del problema y de la solución dada, que permite abordar su repercusión práctica, otra vía posible de solución o alguna otra cuestión que se considere (AV) y a la actividad con GeoGebra (GG).

Resolución dinámica (numérica - geométrica) de un problema de: actividad con GeoGebra

En la figura 2 se incluyen cuatro imágenes de vistas gráficas posibles durante la ejecución de la actividad *rectángulo de área máxima inscrito en elipse.ggb*, elaborada con el software GeoGebra

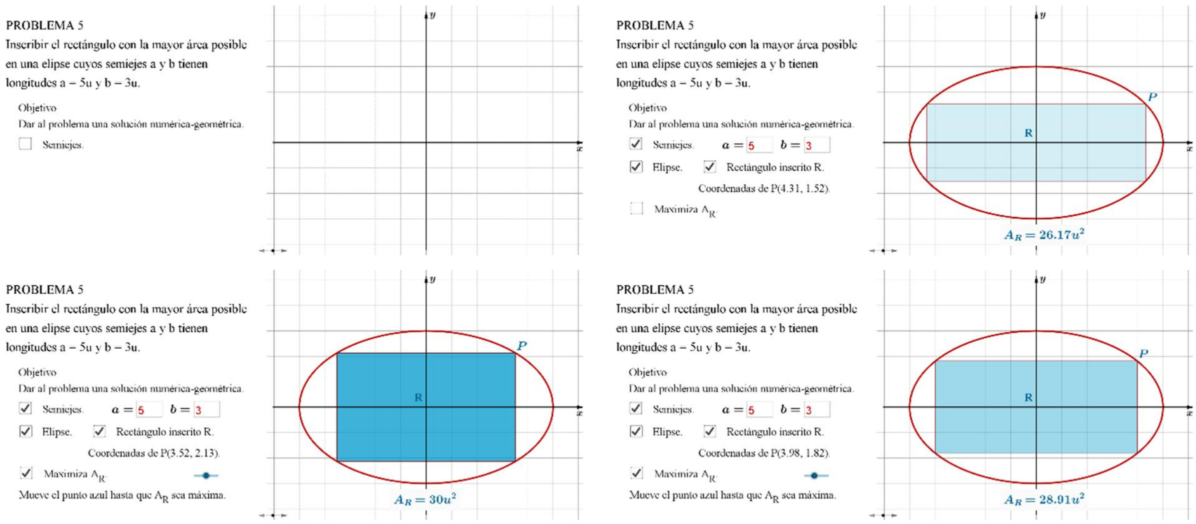

Figura 4. Imágenes de vistas gráficas en la ejecución de la actividad *rectángulo* … *elipse*.ggb.

Arriba a la izquierda en la figura 4 aparece la imagen de la vista gráfica cuando se abre la actividad dinámica con el problema que se está considerando (si es que se guardó así, que es lo que se recomienda). A su derecha una imagen de la vista gráfica que resulta luego de activar tres de las casillas de control. Si bien se tiene la opción de introducir libremente los valores de los semiejes, los que aparecen son los que se usaron en la solución formalizada y en la interactiva. En correspondencia con las casillas activas, también aparecen la elipse en un sistema de coordenadas en el que se incluye una malla o cuadrícula con escala unitaria, un rectángulo inscrito, su área y las coordenadas del vértice P, estos valores redondeados hasta dos cifras decimales. Aparece sin activar la casilla de control que precede al texto $Maximiza\ A_R$.

Abajo a la derecha una nueva vista gráfica en la que ya está seleccionada la última casilla de control, que hizo visible el $deslizador$ con el punto azul y el texto $Mueve\ el\ punto\ azul\ hasta\ que\ A_R\ sea\ máxima$. Aparece un rectángulo, ya modificado luego de haber movido ese punto, lo que lógicamente también produjo cambios en el valor del área y en las coordenadas de P. La única forma de conocer que se alcanzó el máximo la da la observación cuidadosa de los valores que va tomando el área al mover ese punto.

Adicionalmente, para la opacidad (es la transparencia que tenga el color de relleno) del rectángulo se utilizó la propiedad de colores dinámicos, de manera que mientras más próximo se esté del óptimo menos transparente es (el azul utilizado se hace más intenso). La opacidad está en función del valor del parámetro variable dado en el $deslizador$, que es el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Toda la construcción relativa al problema está en función de este parámetro.

Finalmente, abajo a la izquierda aparece la imagen de la vista gráfica que corresponde al rectángulo de área máxima (ya se conoce que es de 30 unidades cuadradas). En todas las actividades elaboradas se utiliza el mismo criterio con el color dinámico, de manera que un aumento en la intensidad del color azul (una disminución de la transparencia) es una señal de acercamiento al óptimo, lo que complementa la información que se obtiene comparando los valores de la cantidad variable que se esté optimizando.

De esta forma concluye la descripción de la resolución de un problema de optimización utilizando una actividad con GeoGebra, que es lo que se ha considerado como abordaje o enfoque dinámico en el trabajo.

4. CONCLUSIONES

En el trabajo se han considerado tres enfoques complementarios para la resolución de los problemas de optimización que se modelan con funciones reales de una variable real, y se han elaborado medios didácticos que demuestran que esos abordajes son posibles. Algunas cuestiones importantes que deben resaltarse son las siguientes:

1. Fue necesaria una selección cuidadosa de los diez problemas que se utilizan, atendiendo a que los mismos deberían satisfacer tres criterios: que admitieran una representación geométrica, que fueran relevantes desde el punto de vista práctico, además de ser adecuados didácticamente, y que no dependieran de parámetro alguno.
2. Los materiales didácticos que permiten poner la propuesta en práctica, pueden utilizarse como medios independientes. El uso de ellos en contextos adecuados de aprendizaje y para variados propósitos, podría contribuir al desarrollo de las habilidades que permitan conseguir que se aprenda a resolver esos importantes problemas.
3. Será la práctica la que permitirá decidir finalmente si es válida o no la opción de abordar la solución de un problema de optimización en las formas descritas, así como qué utilización dar a los medios didácticos que forman parte del trabajo. Se tiene la esperanza de que sean de utilidad a profesores y estudiantes.
4. La propuesta que se hace debe verse como lo que es: unas consideraciones y unos medios que podrían constituirse en un recurso más para enfrentar toda la complejidad inherente al aprendizaje matemático, en particular, la de los problemas considerados.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cuba. Ministerio de Educación Superior. (2018). *Plan de estudio E de la carrera de Ingeniería Industrial*. La Habana, Cuba.

Leibniz, G. W. (1984). *A new method for finding máxima and minima, and likewise for tangents, and with a single kind of calculation for these, which is hindered neither by fractions nor irrational quantities*. From Actis Erud. Lips. Oct. 1684. p. 467-473. (Transl. with notes by Ian Bruce, 2014). Recuperado de: www.http://17centurymaths.com/contents/Leibniz/nova1.pdf. 10 de marzo de 2019.

Matijasevic, E. (2010). *Leibniz y Newton: la inercia de la soberbia*. Acta Médica Colombiana Vol. 35 Nº 4, octubre-diciembre, p. 157-165. Bogotá, Colombia. Recuperado de: https://www.academia.edu/17231119/Leibniz_y_Newton_la_inercia_de_la_soberbia, 10 de marzo de 2019.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir. Moscú, URSS.

Stewart, J. (2009). *Cálculo con trascendentes tempranas*. Félix Varela, La Habana.

SOBRE LOS AUTORES

Rogelio Paulino Acosta González, Licenciado en Matemática, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 1980. Profesor Auxiliar del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.

Osvaldo Almeida Conde, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática, Instituto Superior Pedagógico José Martí, Camagüey, 1989. Máster en Ciencias de la Educación, Instituto Superior Pedagógico Pepito Tey, 2008. Profesor Auxiliar del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas. Jefe de este Departamento.

José Acosta Velázquez, Licenciado en Matemática, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 1995. Profesor Asistente del Departamento de Matemática de la Universidad de Las Tunas.