

Problemas de Contorno Compuesto en Análisis Complejo y Cuaterniónico

Carlos Daniel Tamayo Castro¹, Ricardo Abreu Blaya², Juan Bory Reyes³

¹Universidad de Holguín, Cuba, ctamayoc@uho.edu.cu, ²Universidad de Holguín, rabreu@uho.edu.cu,

³Instituto Politécnico Nacional SEPI-ESIME-ZAC, juanboryreyes@yahoo.com

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de una clase de problemas de contorno compuesto para la ecuación de Dirac homogénea en dos y tres dimensiones donde una de las condiciones de contorno (la de conjugación lineal) es cargada. Aquí se muestra como la ausencia de conmutatividad inherente en el producto cuaterniónico, paradójicamente relaja las condiciones que garantizan la solubilidad de los problemas considerados. Se presentan algunos ejemplos que ilustran los resultados.

PALABRAS CLAVE: Problemas de Riemann-Hilbert, Análisis Cuaterniónico.

Compound Boundary Value Problems in Complex and Quaternionic Analysis

ABSTRACT

The aim of this paper is the study of a class of compound boundary value problems for the homogeneous Dirac equation in two and three dimensions where one of the two boundary conditions (linear conjugation) is loaded. It is shown how the lack of commutativity inherent in the quaternionic product, paradoxically relaxes the conditions to guarantee the solvability of considered problems. Some examples illustrating the results are presented.

KEYWORDS: Riemann-Hilbert Problems, Quaternionic analysis.

1. Introducción

La más natural y cerrada generalización del análisis complejo es el análisis cuaterniónico, el cual preserva muchos de sus resultados básicos. Este está centrado alrededor de la noción de una función hiperholomorfa, i.e., las soluciones que anulan el operador de Cauchy Riemann reescrito en términos cuaterniónicos. Para un profundización de dicha teoría se recomienda la lectura de [10, 11, 12]. Esta teoría, por más de un siglo, ha probado ser una eficiente herramienta para tratar una amplia clase de problemas de contorno en casi todas las áreas de la física y la ingeniería. No obstante, como se reporta tempranamente en la sección de problemas del libro [16], existen considerables obstáculos para dar un tratamiento completo al problema de contorno tipo Riemann-Hilbert para funciones hiperholomorfas. En particular, está el hecho que el producto de dos funciones hiperholomorfas puede no ser hiperholomorfa a causa de la pérdida de conmutatividad inherente en el producto cuaterniónico. Esto explica por qué una solución explícita para el problema de contorno cuaterniónico de Riemann-Hilbert para funciones hiperholomorfas, ha sido obtenida solo para el caso particular del llamado problema del salto (o algunas muy leves modificaciones de este), donde la problemática de la multiplicación cuaterniónica puede ser esencialmente evitada. Sin ninguna pretensión de completitud se refiere a [5, 6, 7, 8, 20] para un tratamiento de alguna clase de problemas de contorno de Riemann-Hilbert cuaterniónicos y Cliffordianos. El principal objetivo de este trabajo es dar un tratamiento completo a una clase de problemas de contorno compuestos de Riemann-Hilbert para funciones holomorfas e hiperholomorfas donde una de las dos condiciones de contorno es cargada. Sorpresivamente, los resultados concernientes al caso hiperholomorfo son mucho más satisfactorios que los concernientes al holomorfo. Un acercamiento a los problemas compuestos de Riemann-Hilbert se realizó, por ejemplo, en [2] y más tarde generalizada para el análisis de Clifford en [3].

2. Preliminares

Sea $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ el casi campo de los cuaternios reales y sea $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3$ las unidades cuaterniónicas tal que satisfacen la condición

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$e_1 e_2 = e_3; \quad e_2 e_3 = e_1; \quad e_3 e_1 = e_2.$$

Para cada $a = a_0 + \underline{a} = \sum_{j=0}^3 a_j e_j$, la norma de a es definida por $|a|^2 = \sum_{j=0}^3 a_j^2$. Además, para a, b de \mathbb{H} se cumple: $|ab| = |a||b|$. El elemento conjugado \bar{a} está dado por $\bar{a} = a_0 - \underline{a}$ y se tiene las propiedades $a\bar{a} = \bar{a}a = |a|^2$; $a_0 := \text{Sc}[a]$ es llamado parte escalar y $\underline{a} := \vec{a}$ es llamado parte vectorial del cuaternio a . Si $\text{Sc}[a] = 0$ el cuaternio \underline{a} es llamado vector puro, y este es identificado con un vector \vec{a} de \mathbb{R}^3 . En términos vectoriales, la multiplicación de dos cuaternios arbitrarios a, b puede reescribirse como sigue:

$$ab = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}. \quad (1)$$

Aquí y en lo que sigue $\vec{a} \cdot \vec{b}$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^3 y $\vec{a} \times \vec{b}$ denota el producto vectorial usual en \mathbb{R}^3 .

Además de las funciones complejas estándares definidas en los subconjuntos de \mathbb{R}^2 , se consideran funciones definidas en los subconjuntos de \mathbb{R}^3 que toman valores en $\mathbb{H}(\mathbb{R})$. Estas últimas pueden ser escritas como $u = \sum_{j=0}^3 u_j e_j$ donde u_j toma valores reales. En ambos contextos mencionados, $C^{0,\nu}(\bullet)$ denota el conjunto de funciones ν -Hölder ($0 < \nu \leq 1$) en \bullet . El operador de Dirac elíptico de primer orden (también llamado Moisil-Teodorescu) se define por

$$D = \sum_{j=1}^3 e_j \partial_{x_j},$$

donde la solución fundamental está dada por

$$E(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} = \frac{1}{4\pi} \text{grad} \frac{1}{|\underline{x}|}.$$

Esto quiere decir que $DE(\underline{x}) = \delta(\underline{x})$, siendo δ la distribución delta de Dirac. Una función u que toma valores en $\mathbb{H}(\mathbb{R})$, definida y diferenciable en una región abierta Ω de \mathbb{R}^3 , es llamada hiperholomorfa en Ω si y sólo si $Du = 0$ en Ω .

3. Problemas cargados en dos y tres dimensiones

3.1. El caso complejo

Mientras no se aclare lo contrario se asume que Ω es un dominio simplemente conexo y acotado de \mathbb{R}^2 con frontera suficientemente suave Γ . Se emplea la notación temporal $\Omega_+ := \Omega$, $\Omega_- := \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega \cup \Gamma)$.

Se comienza por recordar el así llamado proble-

ma del salto para funciones holomorfas, que consiste en encontrar una función ψ , holomorfa en $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ que satisfaga

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = g(t), t \in \Gamma, \psi^-(\infty) = 0 \quad (2)$$

donde g es una función continua dada en Γ , y $\psi^\pm(t)$ representa los valores límites de la función deseada ψ en el punto $t \in \Gamma$ cuando se tiende al punto desde Ω_\pm , respectivamente. Por el abuso de notación, también escribimos ψ^\pm , para las respectivas restricciones de ψ a Ω_\pm . Como es conocido de la literatura clásica (ver, [9, 13, 17]), si una solución de (2) existe, es única y puede ser dado por la así llamada transformada de Cauchy

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Observación 1. Si se enfoca la atención en soluciones de (2) regular en ∞ se tendrán muchas soluciones de la forma $\psi(z) + b$, donde $b \in \mathbb{C}$ es arbitrariamente elegido.

Sea $t_0 \in \Gamma$ y supóngase que $g \in C^{0,\nu}(\Gamma)$. Considérese el siguiente problema de salto cargado para funciones holomorfas. Hallar la función ϕ , holomorfa en $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ y satisfaciendo:

$$\phi^+(t)\phi^-(t_0) - \phi^-(t)\phi^+(t_0) = g(t), \quad (3)$$

$$t \in \Gamma, \phi^-(\infty) = 0$$

Algunos antecedentes, a los que el lector puede remitirse, se encuentran en [1, 18, 19]. En una primera mirada, una condición de compatibilidad $g(t_0) = 0$ emerge naturalmente. Ciertamente, haciendo $t = t_0$ en (3), se obtiene

$$g(t_0) = \phi^+(t_0)\phi^-(t_0) - \phi^-(t_0)\phi^+(t_0) = 0$$

Ya que $g \in C^{0,\nu}(\Gamma)$, entonces puede ser representado en Γ por

$$g(t) = \psi^+(t) - \psi^-(t), \quad (4)$$

donde como se dijo anteriormente

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Combinando (3) y (4) con los teoremas de Painlevé y Liouville, se obtiene

$$\psi^+(t) = \phi^+(t)\phi^-(t_0), \psi^-(t) = \phi^-(t)\phi^+(t_0),$$

y por tanto

$$\psi^+(t_0) = \phi^+(t_0)\phi^-(t_0), \psi^-(t_0) = \phi^-(t_0)\phi^+(t_0).$$

Consecuentemente, las condiciones $\psi^+(t_0) \neq 0$ y $\psi^-(t_0) \neq 0$ emergen, como condiciones necesarias naturales de las suposiciones del problema. Luego,

$$\phi^+(z) = \frac{\psi(z)}{\phi^-(t_0)}, z \in \Omega_+, \phi^-(z) = \frac{\psi(z)}{\phi^+(t_0)}, z \in \Omega_-$$

Lo que resta es determinar los valores de $\phi^+(t_0)$ y $\phi^-(t_0)$. Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad resulta $\psi^+(t_0) = \psi^-(t_0)$. Entonces se tiene la siguiente ecuación no lineal,

$$\phi^+(t_0)\phi^-(t_0) = \psi^-(t_0),$$

cuya solución general está dada por

$$\phi^+(t_0) = c \neq 0, \phi^-(t_0) = \frac{\psi^-(t_0)}{c}$$

Consecuentemente, se deduce la solución general de (3)

$$\phi^+(z) = \frac{c}{\psi^-(t_0)}\psi^+(z), \phi^-(z) = \frac{1}{c}\psi^-(z),$$

$$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es fácil ver que las condiciones $g(t_0) = 0, \psi(t_0) \neq 0$ y $\psi(t_0) \neq 0$ son también suficientes para la solubilidad de (3).

Observación 2. De conformidad con la Observación 1, si la condición $\phi(\infty) = 0$ es reemplazada por la regularidad de ϕ en ∞ , entonces la solución general de (3) está dada por

$$\phi^+(z) = \frac{c}{\psi^-(t_0) + b}(\psi^+(z) + b),$$

$$\phi^-(z) = \frac{1}{c}(\psi^-(z) + b), \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

para un número complejo arbitrario $b \neq -\psi^-(t_0)$.

3.2. El caso cuaterniónico

El uso de los mismos símbolos Ω, Ω_\pm y Γ para denotar los dominios y su frontera cuando se consideran subconjuntos de \mathbb{R}^3 , no causa confusión. El problema del salto cargado para funciones hiperholomorfas puede ser enunciado análogamente como para las holomorfas.

Sea \underline{x}_0 un punto en Γ y sea g una función con valores \mathbb{H} que pertenece a $C^{0,\nu}(\Gamma)$. Encontrar una función Φ , hiperholomorfa en $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ con $\Phi^+(\underline{x}_0) \neq$

0, $\Phi^-(x_0) \neq 0$ y satisfaciendo:

$$\Phi^+(x)\Phi^-(x_0) - \Phi^-(x)\Phi^+(x_0) = g(x), \quad (5)$$

$$x \in \Gamma, \Phi^-(\infty) = 0.$$

En primer lugar nótese que la condición $g(x_0) = 0$ ya no es necesaria en este caso, como una consecuencia directa de la no conmutatividad del producto cuaterniónico.

Ya que $g \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, se puede expresar en Γ como

$$\Psi^+(x) - \Psi^-(x) = g(x), x \in \Gamma,$$

donde

$$\Psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^3} n(y) g(y) dy.$$

Los teoremas de Peinleve y Liouville para funciones (ver [4, 10]) permiten obtener

$$\Phi^+(x)\Phi^-(x_0) = \Psi^+(x), x \in \Omega_+$$

y

$$\Phi^-(x)\Phi^+(x_0) = \Psi^-(x), x \in \Omega_-.$$

En particular,

$$\Psi^+(x_0) = \Phi^+(x_0)\Phi^-(x_0),$$

$$\Psi^-(x_0) = \Phi^-(x_0)\Phi^+(x_0),$$

que implica las condiciones necesarias $\Psi^+(x_0) \neq 0$ y $\Psi^-(x_0) \neq 0$.

Por lo tanto,

$$\Phi^+(x) = \Psi^+(x)[\Phi^-(x_0)]^{-1}, x \in \Omega_+$$

y

$$\Phi^-(x) = \Psi^-(x)[\Phi^+(x_0)]^{-1}, x \in \Omega_-.$$

Para determinar los valores $\Phi^+(x_0)$, $\Phi^-(x_0)$ es necesario considerar el sistema cuaterniónico

$$\Psi^+(x_0) = \Phi^+(x_0)\Phi^-(x_0)$$

$$\Psi^-(x_0) = \Phi^-(x_0)\Phi^+(x_0),$$

el cuál puede ser reescrito como el sistema homogéneo en las incógnitas Φ_j^+ , $j = 0, \dots, 3$ siguiente:

$$\begin{cases} (\Psi_0^+ - \Psi_0^-)\Phi_0^+ + (\Psi_1^- - \Psi_1^+)\Phi_1^+ + \\ (\Psi_1^+ - \Psi_1^-)\Phi_0^+ + (\Psi_0^+ - \Psi_0^-)\Phi_1^+ - \\ (\Psi_2^+ - \Psi_2^-)\Phi_0^+ + (\Psi_3^+ + \Psi_3^-)\Phi_1^+ + \\ (\Psi_3^+ - \Psi_3^-)\Phi_0^+ - (\Psi_2^+ + \Psi_2^-)\Phi_1^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} +(\Psi_2^- - \Psi_2^+)\Phi_2^+ + (\Psi_3^- - \Psi_3^+)\Phi_3^+ = 0, \\ -(\Psi_3^+ + \Psi_3^-)\Phi_2^+ + (\Psi_2^+ + \Psi_2^-)\Phi_3^+ = 0, \\ +(\Psi_0^+ - \Psi_0^-)\Phi_2^+ - (\Psi_1^+ + \Psi_1^-)\Phi_3^+ = 0, \\ +(\Psi_1^+ + \Psi_1^-)\Phi_2^+ + (\Psi_0^+ - \Psi_0^-)\Phi_3^+ = 0, \end{cases} \quad (6)$$

donde Ψ_j^\pm y Φ_j^\pm denotan los componentes reales de $\Psi^\pm(x_0)$ y $\Phi^\pm(x_0)$, respectivamente. Sea denotada por A la matriz del sistema anterior, i.e.,

$$A = \begin{pmatrix} (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) & (\Psi_1^- - \Psi_1^+) \\ (\Psi_1^+ - \Psi_1^-) & (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) \\ (\Psi_2^+ - \Psi_2^-) & (\Psi_3^+ + \Psi_3^-) \\ (\Psi_3^+ - \Psi_3^-) & -(\Psi_2^+ + \Psi_2^-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Psi_2^- - \Psi_2^+) & (\Psi_3^- - \Psi_3^+) \\ -(\Psi_3^+ + \Psi_3^-) & (\Psi_2^+ + \Psi_2^-) \\ (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) & -(\Psi_1^+ + \Psi_1^-) \\ (\Psi_1^+ + \Psi_1^-) & (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) \end{pmatrix}.$$

Entonces, el sistema homogéneo (6) tiene solución no trivial si y sólo si A tiene determinante cero. En ese caso, la solución general de (5) está dado por

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) &= \Psi^+(x)c[\Psi^-(x_0)]^{-1}, \\ \Phi^-(x) &= \Psi^-(x)[c]^{-1}. \end{aligned}$$

donde $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$ es cualquier solución no nula de (6). Se puede ver que la condición $g(x_0) = 0$ es suficiente para tener una solución no nula del sistema (6). Esta condición no es necesaria como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Sea Γ la esfera tridimensional $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = \frac{3}{2}\}$ y $x_0 = e_1 + e_2 + \frac{e_3}{2}$. Considérese la función

$$g(x) = \frac{\overline{x - 2e_1}}{|x - 2e_1|^3} + \frac{\overline{x}}{|x|^3},$$

definida en Γ .

Nótese que $g(x_0) = g(e_1 + e_2 + \frac{e_3}{2}) = -\frac{16}{27}e_2 - \frac{8}{27}e_3 \neq 0$, $\Psi^+(e_1 + e_2 + \frac{e_3}{2}) = \frac{8}{27}e_1 - \frac{8}{27}e_2 - \frac{4}{27}e_3 \neq 0$ y $\Psi^-(e_1 + e_2 + \frac{e_3}{2}) = \frac{8}{27}e_1 + \frac{8}{27}e_2 + \frac{4}{27}e_3 \neq 0$.

Aplicando el método propuesto a este ejemplo, se llega a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{16}{27} & \frac{8}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{27} & 0 & 0 & -\frac{16}{27} \\ -\frac{8}{27} & 0 & \frac{16}{27} & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es cero. Luego de algunos cálculos se encuentra la solución general de (5),

dada por

$$\begin{aligned}\Phi^+(\underline{x}) &= -\frac{\underline{x} - 2e_1}{|\underline{x} - 2e_1|^3}(-a + be_1 - \frac{a}{2}e_2 + ae_3) \cdot \\ &\quad \cdot (-\frac{3}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_2 - \frac{3}{4}e_3), \\ \Phi^-(\underline{x}) &= \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3}[-a + be_1 - \frac{a}{2}e_2 + ae_3]^{-1},\end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ no son cero simultáneamente.

Observación 3. Si se reemplaza la condición $\Phi(\infty) = 0$ por la regularidad de Φ en ∞ , entonces la solución general del problema está dada por

$$\begin{aligned}\Phi^+(\underline{x}) &= (\Psi^+(\underline{x}) + b)c[\Psi^-(\underline{x}_0) + b]^{-1}, \\ \Phi^-(\underline{x}) &= (\Psi^-(\underline{x}) + b)[c]^{-1},\end{aligned}$$

donde $b \notin \{-\Psi^-(\underline{x}_0), -\Psi^+(\underline{x}_0)\}$, el determinante de la matriz

$$A_b = \begin{pmatrix} (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) & (\Psi_1^- - \Psi_1^+) \\ (\Psi_1^+ - \Psi_1^-) & (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) \\ (\Psi_2^+ - \Psi_2^-) & (\Psi_3^+ + \Psi_3^- + 2b_3) \\ (\Psi_3^+ - \Psi_3^-) & -(\Psi_2^+ + \Psi_2^- + 2b_2) \\ (\Psi_2^- - \Psi_2^+) & (\Psi_3^- - \Psi_3^+) \\ -(\Psi_3^+ + \Psi_3^- + 2b_3) & (\Psi_2^+ + \Psi_2^- + 2b_2) \\ (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) & -(\Psi_1^+ + \Psi_1^- + 2b_1) \\ (\Psi_1^+ + \Psi_1^- + 2b_1) & (\Psi_0^+ - \Psi_0^-) \end{pmatrix}$$

es cero y $c = (c_0, \dots, c_3)$ denota una solución no nula arbitraria del sistema lineal homogéneo $A_b c = 0$.

4. Problemas de contorno compuesto complejo y cuaterniónico

En esta sección se considera el problema de contorno compuesto de Riemann-Hilbert en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 donde una de las dos condiciones de frontera es cargada.

4.1. Un problema compuesto en análisis complejo

Sea Ω como antes y tal que $\mathbb{R}_+^2 := \{z = x + iy \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ contiene $\Omega \cup \Gamma$. Se está interesado en encontrar una función $\phi(z)$, holomorfa en $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Gamma$, con valores límites continuos en $\mathbb{R}_0^2 \cup \Gamma$ y tal que

$$\phi^+(t)\phi^-(t_0) - \phi^-(t)\phi^+(t_0) = g(t), \quad (7)$$

$$t \in \Gamma, \phi(\infty) = 0,$$

$$\Re[\phi(t)] = f(t), t \in \mathbb{R}_0^2. \quad (8)$$

donde $\phi^+(t_0) \neq 0, \phi^-(t_0) \neq 0$, y $\mathbb{R}_0^2 := \{z = x + iy \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Se escribe $\Re z$ para la parte real de z .

Aquí como antes, g es una función ν -Hölder en Γ al igual que f lo es en cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R}_0^2 . Además, para $t \in \mathbb{R}_0^2$, con $|t|$ suficientemente grande, es requerida la siguiente condición (ver [13]):

$$|f(t) - f(\infty)| \leq \frac{M}{|t|^\nu}, 0 < \nu \leq 1. \quad (9)$$

Nótese que como ϕ se hace cero en ∞ esto implica la condición de compatibilidad $f(\infty) = 0$. Para dar solución a este problema se introduce una modificación del método de eliminación proveniente de [13, 14, 15]. Primero se encontrará una función $\phi_1(z)$ holomorfa en $(\mathbb{R}_+^2 \setminus \Gamma) \cup \{\infty\}$ y continua sobre \mathbb{R}_0^2 satisfaciendo la relación de salto cargado en (7), haciendo caso omiso de (8) y la condición de nulidad en ∞ , por ahora.

Siguiendo el método usado en la sección previa, se tiene que si $g(t_0) = 0$, entonces la función

$$\phi_1^+(z) = \frac{c}{\psi^+(t_0) + b}(\psi^+(z) + b),$$

$$\phi_1^-(z) = \frac{1}{c}(\psi^-(z) + b), \quad c \neq 0, b \neq -\psi^+(t_0),$$

es una solución de este problema, donde

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

En general $\Re[\phi_1(t)] \neq f(t)$. Se buscará una función ϕ , solución de (7)-(8), en la forma $\phi(z) = \phi_1(z) + U(z)$, tal que $U(z)$ sea alguna función holomorfa adecuada en $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Gamma$ que será construida. Por lo tanto, el problema original se transforma en encontrar $U(z)$, holomorfa en $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Gamma$, y tal que

$$[\phi_1^+(t) + U^+(t)][\phi_1^-(t_0) + U^-(t_0)] -$$

$$-[\phi_1^-(t) + U^-(t)][\phi_1^+(t_0) + U^+(t_0)] = g(t), t \in \Gamma,$$

$$\Re[U(t)] = f(t) - \Re[\phi_1(t)], t \in \mathbb{R}_0^2.$$

La construcción de tal función auxiliar U será llevada a cabo imponiendo las suposiciones adicionales $U^+(t_0) = U^-(t_0) = 0$. Entonces, el problema previo se reduce a

$$U^+(t)\phi_1^-(t_0) - U^-(t)\phi_1^+(t_0) = 0, t \in \Gamma, \quad (10)$$

$$\Re[U(t)] = f(t) - \Re[\phi_1(t)] =: f^*(t), t \in \mathbb{R}_0^2, \quad (11)$$

donde f^* obviamente satisface la condición (9). Debido al teorema de Painlevé, cualquier solución de (10) necesita ser holomorfa en \mathbb{R}_+^2 . Entonces una solución de (10)-(11) está dada por

$$U(z) = \frac{\phi_1^+(t_0)}{\phi_1^-(t_0)} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^*(\tau)}{\tau - z} d\tau + id \right), \quad z \in \Omega_+$$

$$U(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^*(\tau)}{\tau - z} d\tau + id, \quad z \in \Omega_- \cap \mathbb{R}_+^2,$$

para cualquier número real d .

Por supuesto, se tiene que tener cuidado acerca de la suposición $U^+(t_0) = U^-(t_0) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^*(\tau)}{\tau - t_0} d\tau + id = \\ & = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau) - \Re\left[\frac{\psi(\tau)+b}{c}\right]}{\tau - t_0} d\tau + id = 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau) - \Re\left[\frac{\psi(\tau)}{c}\right]}{\tau - t_0} d\tau - \Re\left(\frac{b}{c}\right) + id = 0. \quad (12)$$

Sea $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fijado y considerando

$$k(c) := k_0 + ik_1 := \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau) - \Re\left[\frac{\psi(\tau)}{c}\right]}{\tau - t_0} d\tau. \quad (13)$$

Ahora, la condición (12) implica $\Re\left(\frac{b}{c}\right) = k_0$, $d = -k_1$. Luego, para encontrar una solución de (7)-(8) que se anula en ∞ es necesario asegurar que

$$\begin{aligned} \phi(\infty) &= \frac{\psi(\infty)}{c} + \frac{b}{c} + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau) - \Re\left[\frac{\psi(\tau)}{c}\right]}{\tau - \infty} d\tau - \\ & - \Re\left[\frac{b}{c}\right] + id = 0, \end{aligned}$$

lo cual es el equivalente a decir

$$\frac{b}{c} - \Re\left[\frac{b}{c}\right] + id = 0.$$

Por lo tanto, se obtiene $-d = k_1$.

Se puede tomar $\frac{b}{c} = k(c)$ cada vez que $k(c)c \neq -\psi^+(t_0)$.

Resumiendo, si $g(t_0) = 0$, $f(\infty) = 0$ y existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $k(c)c \neq -\psi^+(t_0)$, se obtiene una solución de (7)-(8) dada por

$$\phi^+(z) = \frac{c}{\frac{\psi^+(t_0)}{c} + k(c)} \left[\frac{\psi(z)}{c} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau) - \Re\left[\frac{\psi(\tau)}{c}\right]}{\tau - z} d\tau \right], \quad z \in \Omega_+$$

$$\begin{aligned} \phi^-(z) &= \frac{\psi(z)}{c} + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau) - \Re\left[\frac{\psi(\tau)}{c}\right]}{\tau - z} d\tau, \\ & \quad z \in \Omega_- \cap \mathbb{R}_+^2, \end{aligned}$$

donde $k(c)$ está dado por (13).

Nótese que aunque las soluciones parciales de (7) y (8) no se anulan en ∞ , ellas permiten construir una solución de (7)-(8) que se anula en ∞ .

5. Un problema compuesto en análisis cuaterniónico

En esta subsección se mantienen las notaciones para los dominios Ω , Ω_{\pm} y Γ , excepto que en esta ocasión son considerados como subconjuntos de $\mathbb{R}_+^3 := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$. Análogamente, se utiliza la notación $\mathbb{R}_0^3 := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$. Ahora el problema consiste en encontrar una función $\Phi(z)$, hiperholomorfa en $\mathbb{R}_+^3 \setminus \Gamma$, con valores límites continuos sobre $\mathbb{R}_0^3 \cup \Gamma$ y tal que

$$\Phi^+(\underline{x})\Phi^-(\underline{x}_0) - \Phi^-(\underline{x})\Phi^+(\underline{x}_0) = g(\underline{x}), \quad (14)$$

$$\underline{x} \in \Gamma, \quad \Phi(\infty) = 0,$$

$$\text{Sc}[\Phi(\underline{x})] = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}_0^3. \quad (15)$$

donde $\Phi^+(\underline{x}_0) \neq 0$, $\Phi^-(\underline{x}_0) \neq 0$.

Esta vez se asume que g es una función con valores en \mathbb{H} de Hölder sobre Γ . Por otra parte f es una función real, de Hölder en cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R}_0^3 y que satisface para $|\underline{x}|$ grande la misma condición (9), i.e.

$$|f(\underline{x}) - f(\infty)| \leq \frac{M}{|\underline{x}|^{\nu}}, \quad 0 < \nu < 1. \quad (16)$$

Aquí esencialmente se procederá de forma análoga al caso complejo. Primero se encontrará una función $\Phi_1(\underline{x})$ hiperholomorfa en $\mathbb{R}_+^3 \setminus \Gamma$, acotada en ∞ y continua sobre \mathbb{R}_0^3 satisfaciendo la relación de salto cargado en (14), haciendo caso omiso de (15) y la condición de nulidad en ∞ por ahora.

Supóngase primero que $g(\underline{x}_0) = 0$. En este caso la matriz A_b tiene la forma

$$A_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (\Psi_3^+ + \Psi_3^- + 2b_3) \\ 0 & -(\Psi_2^+ + \Psi_2^- + 2b_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (\Psi_3^+ + \Psi_3^- + 2b_3) \\ 0 & -(\Psi_2^+ + \Psi_2^- + 2b_2) \end{pmatrix}.$$

Esto significa que se está en libertad de escoger $c = (c_0, 0, 0, 0)$, con $c_0 \in \mathbb{R}$ no nulo, a título solución del sistema $A_b c = 0$. En este caso, se tiene la solución

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(\underline{x}) &= (\Psi^+(\underline{x}) + b)c_0[\Psi^-(\underline{x}_0) + b]^{-1}, \\ \Phi_1^-(\underline{x}) &= \frac{1}{c_0}(\Psi^-(\underline{x}) + b), \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$\Psi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\overline{y - \underline{x}}}{|y - \underline{x}|^3} n(y) g(y) dy$$

y b no es ninguno de los dos valores $-\Psi^-(\underline{x}_0)$ y $-\Psi^+(\underline{x}_0)$.

En general $\text{Sc}[\Phi_1(\underline{x})] \neq f(\underline{x})$. Se buscará una función Φ , solución de (14)-(15), en la forma $\Phi(\underline{x}) = \Phi_1(\underline{x}) + U(\underline{x})$, donde $U(\underline{x})$ es alguna función hiperholomorfa adecuada en $\mathbb{R}_+^3 \setminus \Gamma$ que será construida.

Otra vez el problema original es transformado en el problema de encontrar $U(\underline{x})$, hiperholomorfa en $\mathbb{R}_+^3 \setminus \Gamma$, y tal que

$$\begin{aligned} &[\Phi_1^+(\underline{x}) + U^+(\underline{x})][\Phi_1^-(\underline{x}_0) + U^-(\underline{x}_0)] - \\ & - [\Phi_1^-(\underline{x}) + U^-(\underline{x})][\Phi_1^+(\underline{x}_0) + U^+(\underline{x}_0)] = g(\underline{x}), \underline{x} \in \Gamma, \\ &\text{Sc}[U(\underline{x})] = f(\underline{x}) - \Re[\Phi_1(\underline{x})], \underline{x} \in \mathbb{R}_0^3. \end{aligned}$$

Bajo la suposición $U^+(\underline{x}_0) = U^-(\underline{x}_0) = 0$, el problema previo se reduce a

$$U^+(\underline{x})\Phi_1^-(\underline{x}_0) - U^-(\underline{x})\Phi_1^+(\underline{x}_0) = 0, \underline{x} \in \Gamma,$$

$$\text{Sc}[U(\underline{x})] = f^*(\underline{x}), \underline{x} \in \mathbb{R}_0^3.$$

donde $f^*(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \text{Sc}[\Phi_1(\underline{x})]$. Un análisis similar al caso complejo, permite obtener una solución de este problema dada por

$$\begin{aligned} U^+(\underline{x}) &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_0^3} \frac{\overline{y - \underline{x}}}{|y - \underline{x}|^3} e_3 f^*(y) dy + \underline{d} \right] \cdot \\ &\cdot \Phi_1^+(\underline{x}_0)[\Phi_1^-(\underline{x}_0)]^{-1}, \underline{x} \in \Omega_+ \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} U^-(\underline{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_0^3} \frac{\overline{y - \underline{x}}}{|y - \underline{x}|^3} e_3 f^*(y) dy + \underline{d}, \\ &\underline{x} \in \Omega_- \cap \mathbb{R}_+^2. \end{aligned} \quad (19)$$

La suposición previa $U^+(\underline{x}_0) = U^-(\underline{x}_0) = 0$ es entonces equivalente a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_0^3} \frac{\overline{y - \underline{x}_0}}{|y - \underline{x}_0|^3} e_3 [f(y) - \text{Sc}[\Psi^-(y)c_0^{-1}]] dy - \\ &- \text{Sc}[bc_0^{-1}] + \underline{d} = 0. \end{aligned}$$

Haciendo

$$k(c_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_0^3} \frac{\overline{y - \underline{x}_0}}{|y - \underline{x}_0|^3} e_3 [f(y) - \text{Sc}[\Psi^-(y)c_0^{-1}]] dy,$$

la anterior condición toma la forma

$$k(c_0) = \text{Sc}[bc_0^{-1}] - \underline{d},$$

o equivalentemente

$$\text{Sc}[k(c_0)] = \text{Sc}\left[\frac{b}{c_0}\right], \quad k(c_0) = -\underline{d}. \quad (20)$$

Obsérvese que siempre b y \underline{d} pueden ser elegidos para satisfacer (20). Luego, para encontrar una solución de (14)-(15) que se anule en ∞ se tiene que asegurar que

$$\frac{b}{c_0} - \text{Sc}\left[\frac{b}{c_0}\right] + \underline{d} = 0, \quad (21)$$

Combinando (20) y (21) se obtiene $b = c_0 k(c_0)$. Consecuentemente, siempre que existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_0 k(c_0) \notin \{\Psi^-(\underline{x}_0), \Psi^+(\underline{x}_0)\},$$

entonces la función $\Phi(\underline{x}) = \Phi_1(\underline{x}) + U(\underline{x})$ es una solución de (14)-(15), donde $\Phi_1(\underline{x})$ y $U(\underline{x})$ están dadas por (5) y (18)-(19), con $b = c_0 k(c_0)$ y $\underline{d} = -k(c_0)$. Teniendo en cuenta que c_0 corre sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la condición $c_0 k(c_0) \notin \{\Psi^-(\underline{x}_0), \Psi^+(\underline{x}_0)\}$ tiene buena probabilidad de suceder.

En el caso en que $g(\underline{x}_0) \neq 0$ algunas obstrucciones aparecen en este método. Más concretamente, en este caso el determinante de la matriz A_b no es automáticamente cero sin importar el valor de b , y por otro lado las soluciones no nulas c de $A_b c = 0$ dependen fuertemente de b . La dificultad es que no está claro cómo escoger b, c, d para asegurar la condición de nulidad en el infinito de la solución Φ . Sin embargo, el ejemplo que sigue muestra como la condición $g(\underline{x}_0) = 0$, no es realmente necesaria.

Ejemplo 3

Sea $\Gamma = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : |\underline{x} - 2e_3| = 1\}$ y $\underline{x}_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{5}{4}e_3 \in \Gamma$. Considérese el problema:

$$\begin{aligned} \Phi^+(\underline{x})\Phi^-(\underline{x}_0) - \Phi^-(\underline{x})\Phi^+(\underline{x}_0) = \\ = \frac{\overline{\underline{x}}}{|\underline{x}|^3} + \frac{\overline{\underline{x} - \frac{5}{2}e_3}}{|\underline{x} - \frac{5}{2}e_3|^3}, \underline{x} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{Sc}[\Phi(\underline{x})] = -\frac{\frac{5}{2}}{|\underline{x} - \frac{5}{2}e_3|^3}, \underline{x} \in \mathbb{R}_0^3. \quad (23)$$

donde $\Phi^+(\underline{x}_0) \neq 0$, $\Phi^-(\underline{x}_0) \neq 0$ y $\Phi(\infty) = 0$.

Se observa que $g(\underline{x}) = \frac{\overline{\underline{x}}}{|\underline{x}|^3} + \frac{\overline{\underline{x} - \frac{5}{2}e_3}}{|\underline{x} - \frac{5}{2}e_3|^3}$ no se anula en \underline{x}_0 . Siguiendo el método para el problema cargado, se tiene

$$\Psi^+(\underline{x}) = -\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3}, \quad \Psi^-(\underline{x}) = \frac{\underline{x} - \frac{5}{2}e_3}{|\underline{x} - \frac{5}{2}e_3|^3}.$$

Como se muestra a continuación, $b = 0$ es un valor adecuado para este propósito. En efecto, produce la matriz

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{8} & 0 & \frac{5\sqrt{2}}{8} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{5\sqrt{2}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con determinante nulo.

Las soluciones de $A_0 c = 0$ son $c = c_0 e_3$, para cualquier número real no nulo c_0 . Convenientemente, se escogerá $c = e_3$, para obtener una solución de (22)-(23) de la forma

$$\Phi^+(\underline{x}) = -\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{5\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\Phi^+(\underline{x}) = \frac{\underline{x} - \frac{5}{2}e_3}{|\underline{x} - \frac{5}{2}e_3|^3} (-e_3).$$

6. Conclusiones

En este trabajo se enuncia un problema de tipo cargado y de tipo compuesto, para los casos complejo y cuaterniónico. Se encuentra una condición necesaria y suficiente para la resolución del problema del salto cargado en el caso complejo. Además, se demuestra que la condición análoga para el caso cuaterniónico es suficiente pero no necesaria, se obtiene una condición necesaria y suficiente para la solubilidad del problema en este caso. También se demuestran

condiciones suficientes para que tenga solución el problema compuesto donde una de sus condiciones de contorno es de tipo cargado.

REFERENCIAS

- [1] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes. *Sobre un procedimiento de reducción para resolver un problema de contorno cargado de Riemann-Hilbert*. Cienc. Mat. (Habana) 16 (1), 35-41, 1998.
- [2] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes. *Boundary value problems for quaternionic monogenic functions on non-smooth surfaces*. Adv. Appl. Clifford Algebras 9, no. 1, 1-22, 1999.
- [3] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes. *On the Riemann-Hilbert type problems in Clifford analysis*. Adv. Appl. Clifford Algebras 11, no. 1, 15-26, 2001.
- [4] R. Abreu Blaya; D. Peña Peña; J. Bory Reyes. *Jump problem and removable singularities for monogenic functions*. J. Geom. Anal., Vol. 17, No.1, 1-14, 2007.
- [5] S. Bernstein. *Riemann-Hilbert problems in Clifford analysis*. Clifford analysis and its applications (Prague, 2000), 1-8, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 25, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [6] S. Bernstein. *The quaternionic Riemann problem*. Function spaces (Edwardsville, IL, 1998), 69-83, Contemp. Math., 232, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [7] J. Bory Reyes; R. Abreu Blaya. *The quaternionic Riemann problem with a natural geometric condition on the boundary*. Complex Variables Theory Appl. 42 (2000), no. 2, 135-149.
- [8] J. Bory Reyes; R. Abreu Blaya. *On the Cauchy type integral and the Riemann problem*. Clifford algebras and their applications in mathematical physics, Vol. 2 (Ixtapa, 1999), 81-94, Progr. Phys., 19, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2000.
- [9] F. D. Gajov. *Boundary value problems*, 3rd ed, Nauka, Moskow, English transl. of 2nd ed, Pergamon Press, Oxford, and Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.

- [10] K. Gürlebeck; W. Sprössig. *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [11] K. Gürlebeck; W. Sprössig. *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, Wiley and Sons Publ., 1997.
- [12] V. V. Kravchenko. *Applied Quaternionic Analysis*, Heldermann Verlag, Berlin, 2003.
- [13] J. K. Lu. *Boundary value problems for analytic functions*, World Scientific Publish. Singapore, New Jersey, London Hong Kong, 1993.
- [14] E. Oboloshvili. *Effective solution of some boundary value problems in two and three dimensional cases*, Proceeding of Functional Analytic Methods in Complex Analysis and applications to Partial Diff Equations, World Scientific, 149-172, 1988.
- [15] E. Oboloshvili. *Boundary and Initial Problems in Clifford Analysis*, Sprössig, Wolfgang (ed.) et al., Proceedings of the symposium on analytical and numerical methods in quaternionic and Clifford analysis, June 5–7, 1996, Seiffen, Germany. Freiberg: TU Bergakademie Freiberg, 145–152, 1996.
- [16] J. Ryan. *Clifford algebras in analysis and related topics*, CRC Press. Boca Raton, New York. London. Tokyo, 1996.
- [17] N. I. Mushelisvili. *Singular integral equations*, Nauka, Moscow, 1968, English transl. of 1st ed., Noodhoff, Groningen, 1953.
- [18] M. S. Selim. *A nonlinear loaded Hilbert problem*. Azerbaidzhan. Gos. Univ. Uchen. Zap. 1978, no. 1, 100-104.
- [19] M. S. Selim. *A nonlinear loaded boundary value problem of Hilbert's type*. Azerbaidzhan. Gos. Univ. Uchen. Zap. 1978, no. 6, 84-89.
- [20] M. V. Shapiro; N. L. Vasilevski. Quaternionic ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. ψ -hyperholomorphic function theory. Complex Variables Theory Appl. 27 (1995), no. 1, 17-46.

SOBRE LOS AUTORES

Carlos Daniel Tamayo Castro trabaja en la Universidad de Holguín como recién graduado, es Licenciado en Matemática. Pertenece a la Sociedad Cubana de Matemática y Computación.

Ricardo Abreu Blaya trabaja en la Universidad de Holguín, se desempeña como Jefe de la Disciplina de Análisis Matemático en el Departamento de Licenciatura en Matemática, cuenta con la categoría docente de profesor titular y con la categoría científica de Doctor en ciencias. Pertenece a la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Es además académico titular de la Academia de Ciencias de Cuba.

Juan Bory Reyes trabaja en el Instituto Politécnico Nacional, cuenta con la categoría docente de profesor titular y con la categoría científica de Doctor en ciencias. Pertenece a la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Es además académico titular de la Academia de Ciencias de Cuba.