

## Propiedades de las funciones monogénicas en $\mathbb{R}^3$

Marisel Avila Alfaro<sup>1</sup>, Ricardo Abreu Blaya<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Holguín, Cuba, mavilaa@uho.edu.cu, <sup>2</sup>Universidad de Holguín, rabreu@uho.edu.cu

### RESUMEN

El principal objetivo de este trabajo es el estudio de una clase de funciones definidas de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  las cuales dado un operador, similar al de Dirac, satisfacen propiedades de monogenicidad muy específicas de la clase. Además, a diferencia del caso cuaterniónico, dadas las restricciones impuestas, la clase de las funciones inframonogénicas coincide con las armónicas. Es conocido que las funciones armónicas en el caso complejo y cuaterniónico pueden ser expresadas como la suma de una función monogénica y una antimonogénica en contraste a lo que sucede con las funciones definidas en un dominio simplemente conexo de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ . Las funciones armónicas ortogonales en  $L_2$  a dicha suma se denominan contragénicas.

**PALABRAS CLAVE:** monogénica, contragénicas, funciones armónicas, descomposición de Almansi.

### Properties of Monogenic Functions in $\mathbb{R}^3$

### ABSTRACT

The aim of this paper is the study of a class of functions from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^3$  which, given an operator, similar to Dirac, satisfy very specific monogenicity properties of the class. Moreover, unlike the quaternionic case, given the constraints imposed, the class of inframonogenic functions is the same as the class of harmonic functions. It's known that the harmonic functions in the case of complex numbers or for quaternions can be expressed as a sum of a monogenic function and an antimonogenic function in contrast to the situation for harmonic functions from a simply connected domain in  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^3$ . Harmonic functions orthogonal in  $L_2$  to all such sums are termed contragenic.

**KEYWORDS::** monogenic, contragenic, harmonic functions, Almansi's decomposition.

## 1. Introducción

Una generalización natural del análisis complejo es el análisis cuaterniónico, este conserva muchos de sus principales resultados. Este gira en torno de la noción de una función hiperholomorfa, es decir, las soluciones que anulan el operador de Cauchy Riemann reescrito en términos cuaterniónicos. Para una profundización de la teoría antes mencionada se recomienda la lectura de [15, 17, 18, 19, 20, 26, 27]. Esta teoría, por más de un siglo, ha demostrado ser un eficaz conjunto de herramientas para tratar una amplia clase de problemas en casi todas las áreas de la física y la ingeniería.

De manera análoga se estudia una clase de funciones que se anulan bajo un operador que generaliza el operador de Cauchy-Riemann en el caso complejo: las funciones polimonogénicas. Estas surgen como generalización de las funciones monogénicas, las cuales satisfacen la ecuación  $Df = 0$  donde  $D$  es el operador de Dirac. Análogamente las funciones polimonogénicas son las que satisfacen  $D^n f = 0$ . Estas tienen gran importancia dentro de la matemática, particularmente las funciones bimonogénicas o polimonogénicas de orden 2, merecen especial atención ya que están estrechamente vinculados con las biarmónicas. De manera análoga, a las monogénicas, estas poseen una fórmula de representación dada en [10], lo cual posibilita un trabajo más cómodo con esta clase de funciones. Un desarrollo de esta teoría así como otros resultados en la misma se puede encontrar en [1, 4, 7, 9, 12, 25].

Las funciones poliarmónicas sobre un dominio de  $\mathbb{R}^N$  son las soluciones de la ecuación diferencial  $\Delta^n f = 0$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  donde  $\Delta$  es el operador de Laplace. Estas funciones fueron extensamente estudiadas por Almási en [2] y [3]. El caso biarmónico, es decir cuando  $n = 2$ , tiene conexión natural con problemas en la teoría de elasticidad, este tema es tratado en [21] y [24], y imagenología radar, para esto ver [5]. Existe una basta literatura sobre funciones poliarmónicas. Para referencias básicas y resultados ver [8, 11, 14, 16, 24].

Las funciones inframonogénicas fueron introducidas por primera vez en el artículo [22] esta clase de funciones tienen relación con las funciones polimonogénicas de orden 3 y con las biarmónicas, además en este trabajo se obtiene una descomposición de Fischer. Recientemente fue obtenido en [23] una fórmula de re-

presentación para esta clase de funciones y se da una descomposición de Almási para esta clase de funciones.

En el artículo [6] se hacen ciertas consideraciones en virtud de definir la clase de funciones contragénicas ver [6]. Estos ajustes están relacionados con definir un operador Tipo Moisil-Theodorescu, y considerar funciones definidas de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .

Estos factores arrojan resultados muy particulares dentro del propio Análisis cuaterniónico.

## 2. Análisis Cuaterniónico

A continuación se define un sistema numérico que constituye una generalización de los números complejos: los cuaternios.

Considérese al espacio  $\mathbb{R}^4$  y a su base canónica

$$\begin{aligned} i_0 &= (1; 0; 0; 0), \\ i_1 &= (0; 1; 0; 0), \\ i_2 &= (0; 0; 1; 0), \\ i_3 &= (0; 0; 0; 1). \end{aligned}$$

Es decir, si  $x \in \mathbb{R}^4$  entonces  $a$  se expresa de manera única como

$$a = a_0 i_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$$

El producto cuaterniónico en  $\mathbb{R}^4$  se define como:

$$\begin{aligned} \forall j, i_0 i_j &= i_j, \\ \forall j \geq 1, i_j^2 &= -i_0, \\ i_1 i_2 &= -i_2 i_1 = i_3, \\ i_2 i_3 &= -i_3 i_2 = i_1, \\ i_3 i_1 &= -i_1 i_3 = i_2. \end{aligned}$$

Según esta regla el producto es asociativo y distributivo, aunque se puede observar que no es conmutativo. Además esta es la única manera de definir el producto de manera tal que resulte un álgebra sin divisores de cero.

En lo posterior se denotará al sistema construido con el símbolo  $\mathbb{H}$ .

También, para  $a, b$  de  $\mathbb{H}$  se cumple:  $|ab| = |a||b|$ .

El elemento conjugado  $\bar{a}$  está dado por  $\bar{a} = a_0 - \underline{a}$  y se tiene las propiedades  $a\bar{a} = \bar{a}a = |a|^2$ ;

$a_0 := \mathcal{S}[a]$  es llamado parte escalar y  $\underline{a} := \vec{a}$  es llamado parte vectorial del cuaternio  $a$ . Si  $\mathcal{S}[a] = 0$  el cuaternio  $\underline{a}$  es llamado vector puro, y este es identificado con un vector  $\vec{a}$  de  $\mathbb{R}^3$ . En términos vectoriales, la multiplicación de dos cuaternios arbitrarios  $a, b$  puede reescribirse como sigue:

$$ab = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}. \quad (1)$$

Aquí y en lo que sigue  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  denota el producto escalar en  $\mathbb{R}^3$  y  $\vec{a} \times \vec{b}$  denota el producto vectorial usual en  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.1. Funciones Monogénicas Laterales

El sistema de los números cuaterniónicos permite la construcción de un Análisis muy poderoso y cómodo: el análisis cuaterniónico.

A continuación se relacionan algunas definiciones de notado interés para la concepción del artículo.

En el espacio  $C^2(\Omega, \mathbb{H})$  se definen los operadores (izquierdo-derecho) de Moisil-Theodorescu:

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j e_j,$$

$$D_d = \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j.$$

**Definición 2.1.** Si una función  $f \in C^2(\Omega, \mathbb{H})$  satisface la condición  $D_i f = 0$  entonces se dice que esta función es **monogénica a la izquierda** en  $\Omega$  y si satisface  $D_d f = 0$  **monogénica a la derecha**. Se denotará al conjunto de las funciones monogénicas a la izquierda como  $\mathfrak{M}^i$  y a las funciones monogénicas a la derecha  $\mathfrak{M}^d$ .

**Observación 2.1.** De manera general, las funciones monogénicas a la izquierda no son monogénicas a la derecha y viceversa.

Una generalización de la clase de funciones citada anteriormente son las funciones polimonogénicas que se definen como:

**Definición 2.2.** Una función  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{H})$  es llamada **polimonogénica** (a la izquierda) de orden  $k$  (o  $k$ -monogénica) en algún dominio  $\Omega$ , si en este dominio satisface la condición:

$$D_i^k f = 0 \quad (2)$$

## 2.2. Funciones armónicas

En la Teoría de Funciones de Variable Compleja se le da un tratamiento especial a una clase de funciones que, entre otros elementos, permiten analizar el comportamiento de las partes real e imaginaria de una función analítica, estas son las llamadas *funciones armónicas*. Alrededor de ellas se han desarrollado varios

temas que han aportado brillantes resultados, entre ellos, el teorema de descomposición de Almansi el cual se enuncia en este apartado.

**Definición 2.3.** Sean los operadores

$$\nabla := (\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n) \text{ y } \Delta := \nabla \nabla = \sum_{i=0}^n \partial_i^2.$$

Una solución de la ecuación  $\Delta f = 0$  se denomina **función armónica**.

Esta definición permite definir el concepto de *función poliarmónica* que tiene aplicación en diversas ramas de la matemática.

**Definición 2.4.** Dado un entero positivo  $N$  se dice que una función  $f \in C^N(\Omega, \mathbb{H})$  es **poliarmónica** de grado  $N - 1$  si satisface:

$$\Delta^N = 0 \quad (3)$$

**Teorema 2.1.** Si  $f$  es una función poliarmónica de grado  $k$  en un dominio estrellado con centro  $0$ , entonces existen  $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$  únicas, armónicas en  $\Omega$  tales que:

$$f(x) = f_0(x) + |x|^2 f_1(x) + \dots + |x|^{2(k-1)} f_{k-1}(x)$$

Para el propósito de este trabajo es necesario definir la clase de funciones *inframonogénicas* que, como se verá posteriormente, guardan una estrecha relación con las funciones armónicas.

**Definición 2.5.** Sea  $f \in C^N(\Omega, \mathbb{H})$ , a las funciones que son solución de la ecuación

$$D_i f D_i = 0 \quad (4)$$

se denominan funciones **inframonogénicas**.

A continuación se presentan algunas propiedades de las funciones inframonogénicas que avalan la importancia de su estudio.

1. Si una función  $f$  es inframonogénica en  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  y toma valores en  $\mathbb{R}$  entonces es armónica en  $\Omega$ .
2. Las funciones monogénicas a la izquierda y a la derecha son inframonogénicas.
3. Si una función  $f$  es inframonogénica en  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  entonces es solución del sistema  $\vec{\partial}^3 f = 0 = f \vec{\partial}^3$ .
4. Toda función inframonogénica  $f \in C^4(\Omega)$  es biarmónica.

### 3. Funciones Monogénicas

En estudios recientes se le ha prestado especial atención a las funciones hiperholomorfas de  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^3$  y de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^4$ , en el presente artículo se analiza la monogenicidad de funciones definidas de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  respecto a un operador tipo Moisil-Theodorescu.

#### 3.1. Funciones Monogénicas

Las funciones monogénicas que se definen a continuación, a pesar de estar definidas en un espacio donde no se conserva la estructura de anillo, tienen propiedades similares a las de las funciones analíticas en  $\mathbb{C}$ .

Sean  $x = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un conjunto abierto y sea  $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$  el espacio de las funciones armónicas definidas en  $\Omega$ .

Considerando los operadores  $D$  y  $\bar{D}$  (tipo Moisil-Theodorescu),

$$\vec{\partial} = \partial_{x_1} e_1 + \partial_{x_2} e_2,$$

$$D = \partial_{x_0} - \vec{\partial},$$

$$\bar{D} = \partial_{x_0} + \vec{\partial},$$

se define la clase de las funciones monogénicas a la izquierda como:

$$M := \{f = f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \bar{D}f = 0\}$$

Obsérvese que las funciones monogénicas son armónicas por la factorización del laplaciano  $\Delta = D\bar{D} = \bar{D}D$  en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 3.1.** Se dice que una función  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  es **antimonogénica** si  $Df = 0$

Consecuentemente,

**Teorema 3.1.** Una función  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  es monogénica a la izquierda si y solo si es monogénica la derecha. El conjunto de las funciones conjugadas de funciones monogénicas coincide con las funciones antimonogénicas.

**Demostración:**

$$\begin{aligned} -e_3 \bar{D}f e_3 &= -e_3 (\partial_0 + \vec{\partial})(e_3)(-e_3)(f_0 + \vec{f}) = \\ &= (\partial_0 - \vec{\partial})(f_0 - \vec{f}) = D\vec{f} \end{aligned}$$

Por tanto,  $\bar{D}f = 0 \Leftrightarrow D\vec{f} = 0 \Leftrightarrow f\bar{D} = 0$ . En lo posterior se hará referencia a estas funciones como monogénicas, ya que los conceptos de monogénica a la izquierda y a la derecha coinciden.

#### 3.2. Funciones Inframonogénicas

Esta subsección está dedicada al análisis de la ecuación  $Df\bar{D} = 0$  con  $f, D$  y  $\bar{D}$  definidos como al inicio de la sección.

**Teorema 3.2.** Sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  entonces una función  $f$  es solución de la ecuación  $Df\bar{D} = 0$  si y solo si es solución de la ecuación  $\Delta f = 0$ .

Para la demostración del Teorema 3.2 se analiza primeramente la expresión  $Df\bar{D}$  donde se aplica a  $f$  el operador  $\bar{D}$  por la derecha y luego al resultado se le aplica  $D$  por la izquierda como se presenta a continuación, asumiendo el producto cuaterniónico como se definió al inicio de la Sección 3.

$$\begin{aligned} Df\bar{D} &= D(f\bar{D}) = \\ &= (\partial_{x_0} - \partial_{x_1} e_1 - \partial_{x_2} e_2)[(f_0 + f_1 e_1 + f_2 e_2)(\partial_{x_0} + \\ &\quad + \partial_{x_1} e_1 + \partial_{x_2} e_2)] = \\ &= (\partial_{x_0} - \partial_{x_1} e_1 - \partial_{x_2} e_2)[\partial_{x_0} f_0 - \partial_{x_1} f_1 - \partial_{x_2} f_2 + \\ &\quad + (\partial_{x_0} f_1 + \partial_{x_1} f_0)e_1 + (\partial_{x_0} f_2 + \partial_{x_2} f_0)e_2 + \\ &\quad + (\partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1)e_3] = \\ &= \partial_{x_0}^2 f_0 - \partial_{x_0} \partial_{x_1} f_1 - \partial_{x_0} \partial_{x_2} f_2 + \partial_{x_1} \partial_{x_0} f_1 + \partial_{x_1}^2 f_0 + \\ &\quad + \partial_{x_2} \partial_{x_0} f_2 + \partial_{x_2}^2 f_0 + (-\partial_{x_1} \partial_{x_0} f_0 + \partial_{x_1}^2 f_1 + \partial_{x_1} \partial_{x_2} f_2 - \\ &\quad - \partial_{x_2} \partial_{x_1} f_2 + \partial_{x_2}^2 f_1 + \partial_{x_0}^2 f_1)e_1 + (\partial_{x_0}^2 f_2 + \partial_{x_0} \partial_{x_2} f_0 - \\ &\quad - \partial_{x_2} \partial_{x_0} f_0 + \partial_{x_2} \partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2}^2 f_2 \partial_{x_1}^2 f_2 - \partial_{x_1} \partial_{x_2} f_1)e_2 + \\ &\quad + (\partial_{x_0} \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_0} \partial_{x_2} f_1 - \partial_{x_1} \partial_{x_0} f_2 - \partial_{x_1} \partial_{x_2} f_0 + \\ &\quad + \partial_{x_2} \partial_{x_0} f_1 + \partial_{x_2} \partial_{x_1} f_0)e_3. \end{aligned}$$

Como  $f_0, f_1, f_2 \in C(\Omega, \mathbb{R})$  se cumple que:

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f_k = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f_k,$$

con  $i, j, k = 0, 1, 2$ .

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} Df\bar{D} &= \partial_{x_0}^2 f_0 + \partial_{x_1}^2 f_0 + \partial_{x_2}^2 f_0 + (\partial_{x_0}^2 f_1 + \partial_{x_1}^2 f_1 + \\ &\quad + \partial_{x_2}^2 f_1)e_1 + (\partial_{x_0}^2 f_2 + \partial_{x_1}^2 f_2 + \partial_{x_2}^2 f_2)e_2, \end{aligned}$$

entonces

$$Df\bar{D} = \Delta f$$

por lo que se puede concluir que la clase de las funciones inframonogénicas coincide con la clase de las funciones armónicas.

Para estudios posteriores se pretende encontrar una descomposición Tipo Almansi para las funciones bimonogénicas por lo que el siguiente teo-

rema resulta ser una herramienta viable.

**Teorema 3.3.** Sea  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  entonces si una función  $f$  es solución de la ecuación  $\bar{D}^2 f = 0$  también es solución de la ecuación  $\Delta^2 f = 0$ .

**Demostración:**

$$\bar{D}^2 f = \bar{D}(\bar{D}f) = 0,$$

por tanto

$$D\bar{D}(\bar{D}f) = 0$$

y por factorización del laplaciano

$$\Delta(\bar{D}f) = 0$$

luego por  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$  y  $\Delta$  un operador real resulta que  $\Delta$  y  $\bar{D}$  conmutan, o sea

$$\bar{D}\Delta f = 0$$

aplicando nuevamente  $D$  a ambos miembros de la ecuación

$$D\bar{D}\Delta f = 0$$

y, nuevamente, por la descomposición del laplaciano

$$\Delta^2 f = 0$$

y así concluye la demostración del teorema.

#### 4. Conclusiones

Los resultados obtenidos permiten concluir que:

1. Las funciones monogénicas a la izquierda son monogénicas a la derecha, con las restricciones impuestas.
2. La clase de funciones inframonogénicas y las armónicas es la misma.
3. Las funciones bimonogénicas son biarmónicas.

#### REFERENCIAS

- [1] L. D. Abreu, H. G. Feichtinger. *Function spaces of polyanalytic functions*, Pre-Publicações do Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2013.
- [2] E. Almansi. *Sull' integrazione dell' equazione differenziale  $\Delta^2 = 0$* , Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 31 (1896), 881-888.

- [3] E. Almansi. *Sull' integrazione dell' equazione differenziale  $\Delta^{2n} = 0$* , Ann. Mat. Pura Appl. (III) 11 (1899), 1-59.
- [4] R. De Almeida and R. S. Kraussnar. *Fundamentals of a Wiman Valiron Theory for Polymonogenic Functions*. American Journal of Mathematics, 20<sup>th</sup> International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering.
- [5] L. E. Andersson, T. Elfving, and G. H. Golub. *Solution of biharmonic equations with application to radar imaging*. J. Comput. Appl. Math. 94 (1998), 153-180.
- [6] C. Alvarez-Peña; M. Porter. *Contragenic Functions of Three Variables*. Complex Analysis and Operator Theory. DOI 10.1007/s11785-013-0294-6.
- [7] E. Ariza y C. J. Vanegas. *Teorema de extensión para funciones multi-monogénicas en álgebras parametrizadas*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XVIII, No. 1 (2011).
- [8] N. Aronszajn, T. M. Creese, and L. J. Lipkin. *Polyharmonic Functions*, Oxford Math. Monogr., Oxford University Press, New York, 1983.
- [9] M.B. Balk, M.F. Zuev. *On polyanalytic functions*, IOPscience, 1969.
- [10] H. Begehr. *Integral representations in Complex, Hypercomplex and Clifford Analysis*, Integral Transforms and Special Functions, 13, 2002.
- [11] A. Borichev, H. Hedenmalm. *Weighted integrability of polyharmonic functions*. Advances in Mathematics, 264, (2014) 464-505.
- [12] J. Bory Reyes, L. De la Cruz Toranzo, and R. Abreu Blaya. *Singular integral operator involving higher order Lipschitz classes*, (Enviado a publicar).
- [13] F. Bracks, R. Delanghe, F. Sommen. *Clifford analysis*, Pitman 1982.
- [14] J. M. Cohen, F. Colonna, K. Gowrisankaran, and D. Singman. *Polyharmonic Functions on Trees*. American Journal of Mathematics, Vol 124, No 5, 2002, 999-1043.

- [15] R. Delanghe, F. Sommen, V. Soucek. *Clifford algebra and Spinor-valued functions*, Kluwer 1992.
- [16] R. J. Duffin, Z. Nehari. *Note on Polyharmonic Functions*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 12, No. 1, 1961, 110-115.
- [17] K. Gürlebeck, K. Habetha, W. Sprössig. *Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space*, Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2008.
- [18] K. Gürlebeck; W. Sprössig. *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [19] K. Gürlebeck; W. Sprössig. *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, Wiley and Sons Publ., 1997.
- [20] V. V. Kravchenko. *Applied Quaternionic Analysis*, Heldermann Verlag, Berlin, 2003.
- [21] S. A. Lurie, V. V. Vasiliev. *The Biharmonic Problem in the Theory of Elasticity*, Gordon and Breach Pub., Amsterdam, 1995.
- [22] H. R. Malonek, D. Peña Peña, F. Sommen. *Fischer decomposition by inframonogenic functions*, Birkhäuser, Basel - Boston - Berlin, 2008.
- [23] A. Moreno, T. Moreno, R. Abreu and J. Bory. *Cauchy Integral formula for inframonogenic functions in Clifford Analysis*. (to appear in Advances and Applied Clifford Algebras).
- [24] M. Nicolesco. *Les Fonctions Polyharmoniques*, Actualités Sci. Indust., vol. 331, Hermann, Paris, 1936.
- [25] V. Palamodov. *Domains of existence of polymonogenic functions*. Gent, 2007.
- [26] J. Ryan. *Clifford algebras in analysis and related topics*, CRC Press. Boca Raton, New York. London. Tokyo, 1996.
- [27] M. V. Shapiro; N. L. Vasilevski. Quaternionic  $\psi$ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I.  $\psi$ -hyperholomorphic function theory. Complex Variables Theory Appl. 27 (1995), no. 1, 17-46.

### **SOBRE LOS AUTORES**

Marisel Avila Alfaro trabaja en la Universidad de Holguín como recién graduada, es Licenciado en Matemática. Se encuentra cursando una maestría en Ciencias Matemáticas en la Universidad de la Habana.

Ricardo Abreu Blaya trabaja en la Universidad de Holguín, se desempeña como Jefe de la Disciplina de Análisis Matemático en el Departamento de Licenciatura en Matemática, cuenta con la categoría docente de profesor titular y con la categoría científica de Doctor en ciencias. Pertenece a la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Es además académico titular de la Academia de Ciencias de Cuba. Ha recibido en seis oportunidades el premio de la Academia de Ciencias de Cuba y en una oportunidad el premio de la Academia de Ciencias del Tercer Mundo.